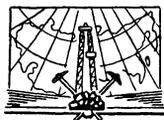


М. М. РУСИНОВ

НЕСФЕРИЧЕСКИЕ
ПОВЕРХНОСТИ В ОПТИКЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НЕДРА»

Москва 1965

ВВЕДЕНИЕ

Применение несферических поверхностей в оптических системах имеет вековую историческую давность. Первые попытки в этом направлении принадлежат Декарту, который даже создал проект специального станка для изготовления таких поверхностей.

Хорошо зарекомендовав себя в осветительных системах и в астрономической оптике, несферические поверхности вплоть до послевоенных лет имели, тем не менее, весьма ограниченное применение. Это объясняется как трудностями изготовления и контроля, так и сравнительно малой изученностью их свойств и методов расчета.

Бурное развитие оптико-механической промышленности в последние годы и в СССР, и за рубежом потребовало создания новых оптических систем с повышенными (как количественно, так и качественно) оптическими характеристиками. Для этого понадобилось обеспечить в разрабатываемых оптических системах наличие больших коррекционных возможностей. Намелились следующие три направления, касающиеся решения этой задачи:

1. Глубокое изучение коррекционных свойств сферических поверхностей при больших апертурах и полях зрения — лучшее использование уже имеющихся возможностей.
2. Использование новых марок оптического стекла с большими показателями преломления и других оптических материалов.
3. Применение несферических поверхностей.

В настоящее время использование несферических поверхностей в оптических системах решает задачу не только исправления аберраций в апертурных пучках лучей; в ряде случаев удается обеспечивать успешное исправление и полевых аберраций — дисторсии и астигматизма.

Существуют и различные приемы использования несферических поверхностей: применение несферических поверхностей, сильно

отличающихся от соприкасающейся сферы; использование «малых деформаций» исходных сферических поверхностей, направленное на уничтожение aberrаций высших порядков.

Однако до настоящего времени материалы по расчету оптических систем с несферическими поверхностями были представлены рядом журнальных статей, разбросанных по специальной литературе, что в значительной степени затрудняло читателя и не могло дать достаточно ясного представления о состоянии всей проблемы в целом. Поэтому представилось целесообразным систематизировать имеющиеся материалы по несферическим поверхностям; этой цели и посвящена настоящая монография.

ГЛАВА I

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Задание уравнения профиля несферической поверхности

Центрированная несферическая поверхность может быть полностью охарактеризована уравнением своей образующей; при выборе уравнения профиля следует принимать во внимание общий характер поверхности.

В некоторых случаях возможно ограничиться предположением, что профиль поверхности представляет одну из кривых второго порядка — эллипс, гиперболу или параболу; для поверхностей такого характера при совмещении большой оси эллипса или действительной оси гиперболы с осью системы наблюдается увеличение радиуса кривизны по мере удаления от вершины кривой. Однако на практике нередко приходится иметь дело с поверхностями, для которых, наоборот, наблюдается уменьшение радиуса кривизны по мере удаления от вершины кривой. Форма таких поверхностей напоминает собой сковородку или шляпку гриба. Таков, например, сплюснутый сфероид.

В некоторых случаях профиль поверхности мало отличается от сферы; наконец, могут встретиться поверхности с образующей, имеющей точки перегиба.

Естественно, выбирая вид уравнения профиля поверхности, следует учитывать общий характер несферической поверхности. Вместе с тем почти всегда выгодно размещать начало координат в вершине кривой; поэтому всегда можно полагать, что в уравнении профиля будет отсутствовать свободный член. Кроме того, общим свойством профилей центрированных поверхностей является их симметрия относительно оси системы. В связи с этим функции, выражающие профиль поверхности, должны быть четными.

Рассмотрим некоторые основные виды уравнений, определяющих собою профиль поверхности.

а. Уравнения кривых второго порядка. Усложненные уравнения кривых. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$y^2 = Ax + Bx^2, \quad (1)$$

$$y^2 = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots \quad (2)$$

Уравнение (1) в случае отрицательного B определяет собою эллипс, при положительном B — гиперболу, в случае равенства B нулю — параболу.

Коэффициент A в уравнении (1) определяет величину радиуса кривизны поверхности кривой в ее вершине:

$$A = 2r_0. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (1) содержит в себе лишь один коэффициент B , не влияющий на радиус кривизны в вершине поверхности; варьирование этим коэффициентом не влияет ни на фокусное расстояние системы и положение изображения для нулевых, или параксиальных, лучей, ни на величину увеличения.

Однако, имея в своем распоряжении лишь один свободный параметр, можно воздействовать с его помощью на ход лишь одного какого-либо луча в пучке лучей, проходящих через поверхность, и придать этому лучу заданное направление; все остальные лучи займут при этом вполне определенные положения.

Наоборот, в уравнении (2) можем располагать двумя или большим числом независимых друг от друга коэффициентов B , C и так далее; в этом случае в принципе можно воздействовать уже на ход нескольких лучей в пучке и придать им заданные направления.

Необходимо сразу же обратить внимание на то обстоятельство, что ни уравнение (1), ни уравнение (2) не могут выразить собою кривые, у которых радиус r_0 в вершине кривой будет равен бесконечности (планоидные поверхности). Действительно в этом случае коэффициент A должен стать равным бесконечности, и тогда оба уравнения теряют смысл.

Продифференцируем уравнение (2). Получаем

$$2yy' = A + 2Bx + 3Cx^2 + \dots, \quad (4)$$

Приравнявая в формуле (4) первую производную y' нулю, получим уравнение, связывающее между собою коэффициенты A , B , C и т. д. и переменную x ; решая это уравнение относительно x , в случае, если эти решения не приведут к мнимости величин y в уравнении (2), получим координаты точек, в которых касательная к кривой профиля поверхности параллельна оси системы.

Формулу (4) можно представить также в следующих видах:

$$2y' = \frac{A + Bx + Cx^2 + \dots + Bx + 2Cx^2 + \dots}{y} \quad (5)$$

или

$$2y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} (B + 2Cx + \dots). \quad (6)$$

б. Уравнение параболы высшего порядка. Это уравнение в общем случае имеет следующий вид:

$$x = Ay^2 + By^4 + Cy^6 + \dots, \quad (7)$$

Четность степеней y в формуле (7) обусловлена симметрией профиля поверхности относительно оси x системы; действительно, изменяя знаки у величин y , ни знака, ни величины x при этом не изменяем.

Считая, что в формуле (7) первый коэффициент A равен нулю, можно получить величину радиуса нашей кривой, равной бесконечности, так как в формуле (7) коэффициент A есть не что иное, как обратная величина удвоенного радиуса кривизны кривой в ее вершине.

Продифференцируем формулу (7). Получаем

$$x' = 2Ay + 4By^3 + 6Cy^5 + \dots \quad (8)$$

Это выражение можно преобразовать:

$$x' = \frac{2}{y} (Ay^2 + 2By^4 + 3Cy^6 + \dots) \quad (9)$$

или

$$x' = \frac{2x}{y} + 2y^3 (B + 2Cy^2 + \dots). \quad (10)$$

в. В некоторых случаях, например, когда встречаемся с малой деформацией сферической поверхности, выгодно воспользоваться заданием профиля поверхности в полярных координатах.

В данной ситуации начало координат совмещать с вершиной кривой неудобно, и тогда в уравнении радиуса-вектора R будет участвовать постоянная R_0 — радиус-вектор вершины кривой.

Таким образом, можно записать

$$R = R_0 + A\varphi^2 + B\varphi^4 + C\varphi^6 + \dots \quad (11)$$

В силу симметрии относительно оси системы радиус-вектор есть четная функция от угла φ .

Радиус-вектор будем считать положительным, когда начало координат расположено левее вершины кривой. Отсчет углов φ будем вести от оси абсцисс против хода часовой стрелки.

В частном (но не единственном!) случае поверхности с малой деформацией можно принять начало координат в центре кривизны поверхности; тогда уравнение профиля поверхности примет вид:

$$R = -r_0 + B\varphi^4 + C\varphi^6 + \dots \quad (12)$$

Заметим, что радиус-вектор не является нормалью к поверхности. Составляя разность

$$\Delta R = R + r_0 = B\varphi^4 + C\varphi^6 + \dots, \quad (13)$$

можно выразить величину деформации поверхности относительно соприкасающейся в вершине поверхности сферы.

Необходимо подчеркнуть, что само условие соприкосновения исключает возможность существования в формулах (12) и (13) членов, содержащих угол φ во второй степени, так как наличие такого члена означало бы, что величины такого радиуса-вектора и радиуса кривизны поверхности в ее вершине не равны друг другу.

Совершенно очевидно, что уравнения (11), (12) и (13) не обязательно задавать в виде функции от угла φ ; с неменьшим успехом можно воспользоваться какими-либо функциями от угла φ , например $\sin \varphi$.

Рассмотрим формулы перехода от уравнений, заданных в полярной системе координат, к уравнениям, заданным в прямоугольной системе координат, и обратно.

Обратимся к рис. 1, откуда следует

$$y = R \sin \varphi, \quad R_0 - x = R \cos \varphi, \quad (14)$$

откуда, в свою очередь,

$$x = -R_0 + R \cos \varphi. \quad (15)$$

Из формул (14) находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{R_0 + x}, \quad R = \frac{y}{\sin \varphi}. \quad (16)$$

Формулы (14) и (15) позволяют осуществить переход от полярных координат к прямоугольным, формулы (16) — обратный переход от прямоугольных координат к полярным.

Поскольку в формулах (14)—(16) встречаемся с тригонометрическими функциями угла φ , возникает целесообразность задания радиуса-вектора как функции той или иной тригонометрической величины.

г. Формулы пересчета коэффициентов уравнений. Обращаясь к уравнениям (2) и (7), видим, что в разные члены их входят линейные величины x и y в различных степенях; однако совершенно очевидно, что должна сохраняться одна и та же размерность для всех членов. Отсюда можно сделать вывод, что размерность коэффициентов A , B , C и т. д. должна быть различной.

Это обстоятельство необходимо учитывать, когда по тем или иным соображениям возникает необходимость перехода к кривой, подобной исходной кривой. При таком переходе необходимо изменять коэффициенты, учитывая их размерность.

Так, например, задавая коэффициент подобия равным N , уравнения (2) и (7) записывают в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= N A x + B x^2 + \frac{C}{N} x^3 + \dots \\ x &= \frac{A}{N} y^2 + \frac{B}{N^3} y^4 + \frac{C}{N^5} y^6 + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

При практических вычислениях нередко приходится сталкиваться с тем, что степени величин x или y получаются очень большими, а сами коэффициенты очень маленькими.

В этих случаях бывает удобно перейти к вспомогательным величинам \bar{x} , \bar{y} , \bar{A} , \bar{B} и т. д. с таким расчетом, чтобы сохранить левые части уравнений (2) и (7) неизменными.

Это можно сделать, вводя вспомогательные величины.

Для формулы (2):

$$\bar{x} = x \cdot 10^{-1}; \quad \bar{A} = A \cdot 10; \quad \bar{B} = B \cdot 10^2 \text{ и т. д.}$$

Для формулы (7):

$$\bar{y} = y \cdot 10^{-1}; \quad \bar{A} = A \cdot 10^2; \quad \bar{B} = B \cdot 10^4 \text{ и т. д.}$$

Совершенно очевидно, что при такой замене левые части формул (2) и (7) по-прежнему сохраняются неизменными.

§ 2. Радиусы кривизны несферической поверхности

а. К а с а т е л ь н а я и н о р м а л ь. Как известно из аналитической геометрии, величина первой производной y' определяет собою тангенс угла α касательной с осью абсцисс; тангенс угла γ нормали с осью абсцисс определяется обратной величиной тангенса угла касательной, взятой с другим знаком.

Однако в оптике для углов нормали с осью системы принято другое правило знаков, аналогичное правилу знаков для углов φ в полярной системе координат. Поэтому вправе записать

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}, \quad x' = \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (18)$$

Дифференцируя формулы (14) и (15), можно выразить дифференциалы x и y через полярные координаты φ и R . Получаем

$$dy = \sin \varphi dR + R \cos \varphi d\varphi, \quad dx = \cos \varphi dR - R \sin \varphi d\varphi. \quad (19)$$

Составляя отношения дифференциалов, найдем величину

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-R \sin \varphi + \cos \varphi \frac{dR}{d\varphi}}{R \cos \varphi + \sin \varphi \frac{dR}{d\varphi}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (20)$$

Величина меридионального радиуса r_t может быть найдена по известной формуле аналитической геометрии:

$$r_t = -\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{(1+x'^2)^{3/2}}{x''}. \quad (21)$$

Величину сагиттального радиуса кривизны можно определить как проекцию отрезка нормали между точками ее пересечения с поверхностью и осью системы. Таким образом,

$$r_s = \frac{y}{\cos \alpha}, \quad (22)$$

но так как

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + y'^2, \quad (23)$$

то величина сагиттального радиуса кривизны может быть определена из формулы

$$r_s = y \sqrt{1 + y'^2}. \quad (24)$$

Сопоставляя формулы (21) и (24), можно записать выражение, связывающее между собой величины r_t и r_s :

$$r_t = -\frac{r_s^3}{y^3 y''}. \quad (25)$$

Для уравнения кривой, заданной в полярных координатах, величина меридионального радиуса кривизны может быть определена по известной формуле аналитической геометрии:

$$r_t = \frac{\left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}}{R^2 + 2 \left(\frac{dR}{d\varphi} \right)^2 - R \frac{d^2 R}{d\varphi^2}}. \quad (26)$$

Все наши рассуждения до сих пор были построены на чисто геометрических соображениях и не касались каких-либо физических законов.

Используя закон преломления

$$n \sin i = n' \sin i', \quad (27)$$

выведем еще одну формулу для угла нормали к преломляющей поверхности с осью системы.

Обратимся к рис. 2, где представлена преломляющая несферическая поверхность, разделяющая две среды с показателями преломления n и n' . Угол нормали с осью обозначен γ ; углы падающего и преломленного лучей с осью системы обозначены β и β' ; углы лучей с нормалью к поверхности в некоторой точке N обозначены i и i' ; y и x — координаты точки N ; r_s — сагиттальный радиус кривизны; точки A , A' и O определяют собою пересечения падающего и преломленного лучей, а также пересечение нормали с осью. Отрезки между точками A и O и A' и O обозначены q и q' .

Согласно рис. 2 следует

$$-i = \gamma - \beta, \quad -i' + \beta' = \gamma, \quad (28)$$

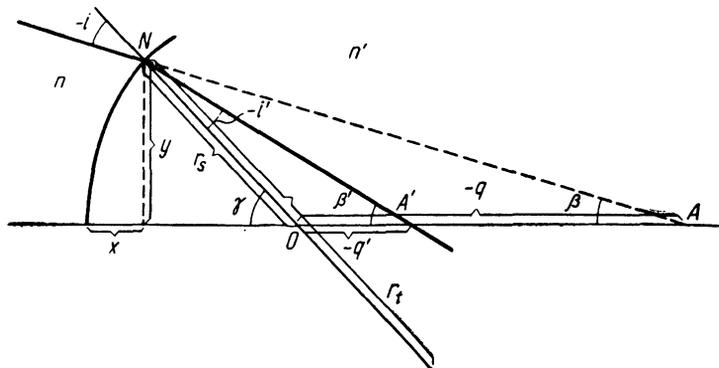


Рис. 2.

откуда, пользуясь законом преломления, получаем

$$n \sin i = n' \sin i' = n \sin (\beta - \gamma) = n' \sin (\beta' - \gamma) \quad (29)$$

или, развертывая выражения синусов,

$$n (\sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma) = n' (\sin \beta' \cos \gamma - \cos \beta' \sin \gamma), \quad (30)$$

откуда

$$(n' \sin \beta' - n \sin \beta) \cos \gamma = (n' \cos \beta' - n \cos \beta) \sin \gamma \quad (31)$$

и окончательно

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{n' \sin \beta' - n \sin \beta}{n' \cos \beta' - n \cos \beta}. \quad (32)$$

б. Меридиональный и сагиттальный инварианты. Найдем изображение точки, создаваемое узкими пучками лучей, преломляющимися на несферической поверхности в некоторой точке N (рис. 3). Величину меридионального радиуса кривизны примем равной r_i ; соединив точки A и A' с меридиональным центром кривизны O , образуем два треугольника: ANO и $A'NO$

(составленные падающим и преломленным лучами, нормалью NO и проведенными нами прямыми AO и $A'O$). Через точки A и A' проведем луч, близкий к основному; углы между близким и основным лучом (оба луча предполагаются лежащими в меридиональной плоскости, проходящей через ось системы) обозначим $d\tau$ и $d\tau'$. Отрезки между точками A и A' и N обозначим соответственно t и t' .

Угол между нормальными в точках преломления первого и второго луча обозначим $d\gamma$. Восстанавливая из точки преломления первого луча перпендикуляры к обоим лучам, можем написать, полагая углы $d\tau$ и $d\tau'$ малыми,

$$LN = t d\tau. \quad (33)$$

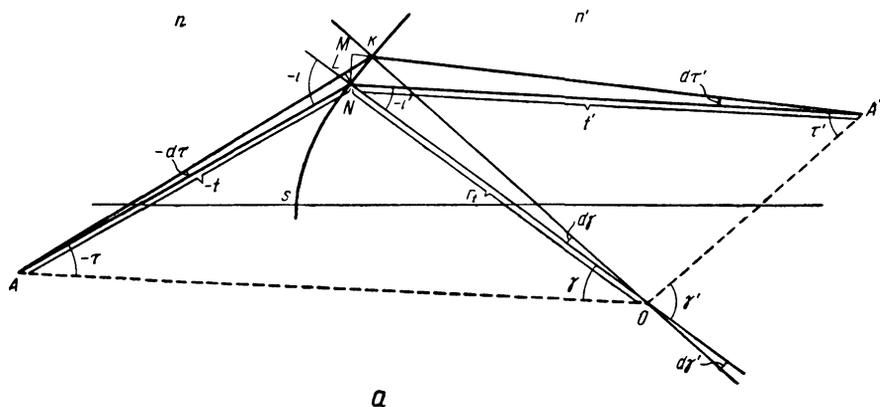


Рис. 3а.

Далее из треугольников AON и $A'ON$ определяем

$$-i = \gamma - \tau, \quad \gamma' = \tau' - i'. \quad (34)$$

Дифференцируя формулы (34) и помня, что $d\gamma' = d\gamma$, находим

$$d\tau - di = d\gamma = d\gamma' = d\tau' - di'. \quad (35)$$

Дифференцируя формулу, выражающую закон преломления, получим

$$n \cos i di = n' \cos i' di'. \quad (36)$$

Формулы (35) и (36) показывают, что если углы $d\tau$ и di малы, то и величины $d\gamma$, di' и $d\tau'$ также малы, поэтому (см. рис. 3, а)

$$NM = t' d\tau', \quad NK = r_1 d\gamma. \quad (37)$$

Из треугольников NLK и NMK , пренебрегая величинами высшего порядка малости, можем вывести

$$NK = \frac{NL}{\cos i} = \frac{NM}{\cos i'} = r_1 d\gamma. \quad (38)$$

Подставляя в формулу (36) значения углов di и di' из (35), найдем

$$n \cos i (d\gamma - d\tau) = n' \cos i' (d\gamma - d\tau'). \quad (39)$$

Заменяя далее $d\tau$ и $d\tau'$ на основании уравнений (33), (37) и (38), получаем

$$n \cos i \left(d\gamma - \frac{r_t \cos i}{t} d\gamma \right) = n' \cos i' \left(d\gamma - \frac{r_t \cos i'}{t'} d\gamma \right) \quad (40)$$

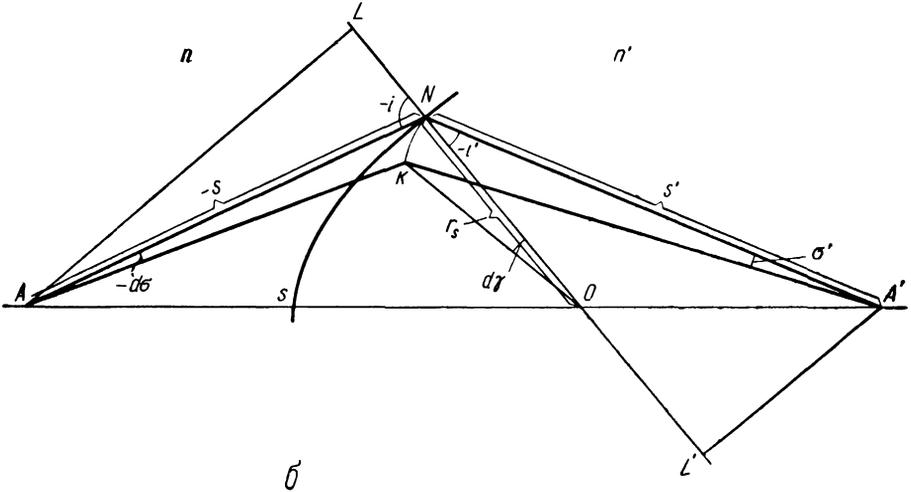


Рис. 36.

и окончательно

$$n \cos i \left(\frac{1}{r_t} - \frac{\cos i}{t} \right) = n' \cos i' \left(\frac{1}{r_t} - \frac{\cos i'}{t'} \right). \quad (41)$$

Выражение (41) известно под названием меридионального инварианта Гульстранда. Этот инвариант при углах i и i' , равных нулю, переходит в известный инвариант Аббе.

В дальнейшем более часто будем пользоваться формулой

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos^2 i}{t} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_t}, \quad (42)$$

легко получаемой из инварианта (41).

е. Сагиттальный инвариант. На рис. 3, б представлен ход сагиттального луча, образованного путем поворота на малый угол вокруг оси AOA' главного луча ANA' , где A и A' — точки предмета и изображения для пучка лучей, идущего вблизи главного луча, но уже в сагиттальной плоскости. Расстояния NA и NA' обозначим s и s' ; углы между главным и сагиттальным лучом

обозначим $d\sigma$ и $d\sigma'$. Опустим из точек A и A' перпендикуляры на падающий и преломленный главные лучи. Согласно рис. 3, б напомним

$$NK = s d\sigma = r_s d\gamma = s' d\sigma' \quad (43)$$

и из треугольников ANL и $A'NL$ соответственно

$$AL = s \sin i, \quad A'L' = -s' \sin i'. \quad (44)$$

Из треугольника ALO и $A'L'O$ следует:

$$\frac{AL}{A'L'} = \frac{r_s - s \cos i}{s' \cos i' - r_s} \quad (45)$$

Разделив формулы (44) друг на друга и помня о законе преломления, находим

$$\frac{AL}{A'L'} = -\frac{s \sin i}{s' \sin i'} = -\frac{sn'}{s'n}. \quad (46)$$

Приравнивая (45) к (46), после некоторых преобразований получаем выражение, известное под названием сагиттального инварианта Гульстранда:

$$n \left(\frac{\cos i}{r_s} - \frac{1}{s} \right) = n' \left(\frac{\cos i'}{r_s} - \frac{1}{s'} \right). \quad (47)$$

Этот инвариант, так же как и меридиональный, при углах i и i' , равных нулю, переходит в инвариант Аббе.

В дальнейшем более часто будем пользоваться формулой

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_s}, \quad (48)$$

легко получаемой из сагиттального инварианта.

Числитель в левых частях формул (42) и (48) можно представить и в виде

$$n' \cos i' - n \cos i = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} i'} - \frac{1}{\operatorname{tg} i} \right) n \sin i = -n \frac{\sin(i' - i)}{\sin i'}. \quad (49)$$

ГЛАВА II

НЕСФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 3. Радиусы кривизны кривых второго порядка. Анаберрационные поверхности

Общее выражение для кривой второго порядка может быть представлено в виде

$$y^2 = 2r_0x + Bx^2. \quad (50)$$

Дважды продифференцировав эту формулу, получим

$$yy' = r_0 + Bx, \quad y'^2 + yy'' = B, \quad (51)$$

откуда

$$y'^2 = \frac{(r_0 + Bx)^2}{2r_0x + Bx^2} \quad (52)$$

и

$$yy'' = B - y'^2 = \frac{B(2r_0x + Bx^2) - (r_0 + Bx)^2}{y^2}. \quad (53)$$

Умножая выражение (53) на y^2 и раскрывая скобки, получаем

$$y^3y'' = -r_0^2, \quad (54)$$

что после подстановки левой части выражения (54) в формулу (25) дает

$$r_t = \frac{r_s^3}{r_0^2} \quad (55)$$

— выражение, справедливое для любой кривой второго порядка.

Анаберрационные поверхности. Как известно, для простой линзы в воздухе, ограниченной сферическими поверхностями, при бесконечно удаленном предмете наблюдается отрицательная сферическая абберация.

Для устранения сферической абберации можем применить несферическую поверхность. В простейшем случае поставим задачу устранения сферической абберации для одной несферической поверхности при бесконечно удаленной точке на оси поверхности.

Решение этой задачи легко осуществляется, если воспользоваться принципом Ферма — условием постоянства оптической длины хода вдоль любого из лучей пучка, исходящего из точки предмета и сходящегося в одну точку изображения.

Представим себе, что у нас имеется несферическая поверхность (рис. 4), разделяющая две среды с показателями преломления n и n' . Согласно принципу Ферма, для предупреждения аберрации необходимо, чтобы

$$\sum nl = \text{const} = \sum nl_0. \quad (56)$$

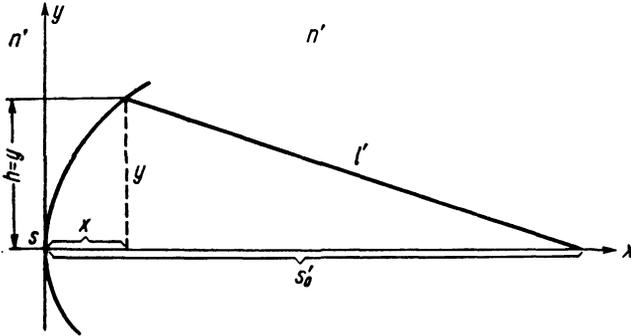


Рис. 4.

В случае если предметная точка лежит в бесконечности, то расстояния от нее до оси ординат как вдоль оси поверхности (оси абсцисс), так и вдоль любого луча, параллельного оси абсцисс, будут равны друг другу. В силу этого условие Ферма сведется к соблюдению равенства

$$nx + n'l' = n's'_0. \quad (57)$$

Величина отрезка l' может быть определена как гипотенуза прямоугольного треугольника, катетами которого являются ордината точки преломления луча на поверхности и разность между отрезком s'_0 и абсциссой точки преломления. Таким образом, можно написать

$$nx + n' \sqrt{y^2 + (s'_0 - x)^2} = n's'_0, \quad (58)$$

откуда

$$y^2 = - (x - s'_0)^2 + \left(s'_0 - \frac{n}{n'} x \right)^2 = x^2 \left[\left(\frac{n}{n'} \right)^2 - 1 \right] - 2s'_0 x \left(\frac{n}{n'} - 1 \right). \quad (59)$$

Формула (59) показывает, что условие уничтожения сферической аберрации приводит к несферической поверхности второго порядка. Пользуясь подстановкой

$$x = x_1 + \frac{s'_0}{\frac{n}{n'} + 1}, \quad (60)$$

можно уравнение (59) привести к следующему виду:

$$x_1^2 - \frac{y^2}{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - 1} = \frac{s_0'}{\left(\frac{n}{n'} + 1\right)^2}. \quad (61)$$

Как видно из равенства (61), при $n < n'$ несферическая поверхность должна представлять собой эллипсоид, а в случае $n > n'$ — гиперболоид.

Перейдем к рассмотрению сферической абберации параболической поверхности. На рис. 5 показано преломление луча, падающего

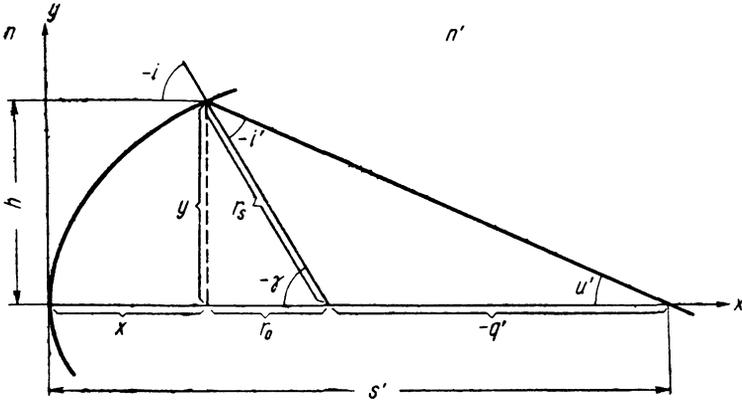


Рис. 5.

на параболическую поверхность параллельно ее оси на некоторой высоте $h = y$; углы падения и преломления обозначим i и i' ; угол нормали с осью γ ; сагиттальный радиус кривизны r_s и апертурный угол преломленного луча u' .

Напишем уравнение параболы

$$y^2 = 2r_0x, \quad (62)$$

откуда

$$x = \frac{y^2}{2r_0} = \frac{h^2}{2r_0}. \quad (63)$$

Из рис. 5 следует, что

$$r_s \sin i' = q' \sin u'; \quad (64)$$

кроме того, дифференцируя формулу (62) и пользуясь формулами (18) (22), имеем

$$r_0 = r_s \cos \gamma = r_s \cos i \quad (65)$$

и

$$u' = i' - i, \quad (66)$$

откуда для синуса угла u' находим

$$\sin u' = n' \sin i' \left(\frac{\cos i}{n'} - \frac{\cos i'}{n} \right). \quad (67)$$

Найдем отношение синуса u' к синусу i' :

$$\frac{\sin u'}{\sin i'} = -\frac{1}{n} (n' \cos i' - n \cos i). \quad (68)$$

Пользуясь формулой (68), формулу (64) преобразуем:

$$q' = -\frac{r_0}{\cos i} \frac{n}{(n' \cos i' - n \cos i)}. \quad (69)$$

Зная q' , найдем и величину s' ;

$$s' = x + r_0 - q' = \frac{h^2}{2r_0} + r_0 + \frac{nr_0}{(n' \cos i' - n \cos i) \cos i}, \quad (70)$$

Но так как

$$\frac{h}{r_0} = -\operatorname{tg} \gamma, \quad \frac{h^2}{r_0^2} = \operatorname{tg}^2 \gamma, \quad \gamma = i, \quad (71)$$

то формула (70) может быть представлена в виде:

$$s' = r_0 \left[\frac{\operatorname{tg}^2 i}{2} + 1 + \frac{n}{(n' \cos i' - n \cos i) \cos i} \right]. \quad (72)$$

Полагая углы i равными нулю, находим отрезок s'_0 для нулевого луча:

$$s'_0 = r_0 \left(1 + \frac{n}{n' - n} \right); \quad (73)$$

составляя разность между формулами (72) и (73), получаем величину сферической абберации для параболической поверхности

$$\Delta s' = s' - s'_0 = r_0 \left[\frac{\operatorname{tg}^2 i}{2} + \frac{n}{(n' \cos i' - n \cos i) \cos i} - \frac{n}{n' - n} \right], \quad (74)$$

Опуская довольно громоздкие преобразования, формулу (74) можно представить так:

$$\Delta s' = \frac{f'_0 (\cos i' - \cos i)}{2(n' + n) \cos^2 i} [n' \cos i' + n \cos i + (n' + n) \cos i] \quad (75)$$

или

$$\Delta s' = \frac{f'_0}{2} \left(\frac{\cos i'}{\cos i} - 1 \right) \left[\frac{n' \cos i' + n \cos i}{(n' + n) \cos i} + 1 \right]. \quad (76)$$

Как показывает формула (76), в случае $n \gg n'$ (преломление происходит из стекла в воздух) сферическая абберация будет отрицательной.

§ 4. Анастигматические несферические поверхности

Имея в своем распоряжении формулы (42) и (48) для меридиональных и сагиттальных пучков лучей

$$\left. \begin{aligned} \frac{n' \cos^2 i'}{i'} - \frac{n \cos^2 i}{t} &= \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_t} \\ \frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} &= \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_s} \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

и задаваясь равенствами $t = s = \infty$ и $t' = s'$, определим условие для отсутствия астигматизма для несферической поверхности при предмете, лежащем в бесконечности. Это условие можно записать в виде:

$$\frac{1}{t'} = \frac{1}{s'} = \frac{n \cos i' - n \cos i}{n' r_t \cos^2 i'} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{n' r_s}, \quad (78)$$

откуда

$$r_t \cos^2 i' = r_s. \quad (79)$$

Формула (79) справедлива для любой кривой.

Для кривых второго порядка можно выразить величину меридионального радиуса кривизны через сагиттальный радиус и радиус кривизны кривой в ее вершине; в соответствии с формулой (55) имеем

$$\frac{r_s^3}{r_0^2} \cos^2 i' = r_s, \quad r_s^2 \cos^2 i' = r_0^2, \quad (80)$$

откуда

$$\cos i' = \frac{r_0}{r_s}, \quad r_0 = r_s \cos i'. \quad (81)$$

Формула (81) дает два значения угла i' , отличающиеся друг от друга лишь знаком.

Определим далее расстояния s' точек пересечения лучей от вершины поверхности, обеспечивающих исправление астигматизма — положение анастигматических зрачков выхода.

Составим следующее уравнение:

$$s' = x + y \operatorname{tg}(\alpha \pm i'). \quad (82)$$

Развернем выражение для тангенса суммы

$$s' = x + y \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} i'}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} i'}, \quad (83)$$

Из формул (51) и (50) следует

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_0 + Bx}{\sqrt{2r_0x + Bx^2}}; \quad (84)$$

пользуясь формулой (81), получаем

$$\cos i' = \frac{r_0}{r_s} = \frac{r_0}{y} \cos \alpha. \quad (85)$$

Выразим величину косинуса α через его тангенс. Находим

$$\cos i' = \frac{r_0}{\sqrt{2r_0x + Bx^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(r_0 + Bx)^2}{2r_0x + Bx^2}}} \quad (86)$$

или

$$\cos i' = \frac{r_0}{\sqrt{2r_0x + Bx^2 + (r_0 + Bx)^2}}. \quad (87)$$

Тангенс угла i' выразим через его косинус.

Получаем

$$\operatorname{tg} i' = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 i'} - 1} = \sqrt{\frac{2r_0x + Bx^2 + (r_0 + Bx)^2}{r_0^2} - 1} \quad (88)$$

или

$$\operatorname{tg} i' = \frac{1}{r_0} \sqrt{(1 + B)(2r_0 + Bx)x}. \quad (89)$$

Пользуясь формулами (84) и (89), преобразуем формулу (83). Находим

$$s' = x + \sqrt{2r_0x + Bx^2} \frac{\frac{r_0 + Bx}{\sqrt{2r_0x + Bx^2}} \pm \frac{1}{r_0} \sqrt{(1 + B)(2r_0 + Bx)x}}{1 \pm (r_0 + Bx) \frac{1}{r_0} \sqrt{1 + B}} \quad (90)$$

или

$$s' = x + \frac{r_0 + Bx \pm \frac{1}{r_0} (2r_0x + Bx^2) \sqrt{1 + B}}{1 \mp \frac{r_0 + Bx}{r_0} \sqrt{1 + B}}. \quad (91)$$

После дальнейших преобразований, получаем

$$s' = \frac{r_0 + (1 + B)x \pm x \sqrt{1 + B}}{1 \mp \frac{r_0 + Bx}{r_0} \sqrt{1 + B}}. \quad (92)$$

Затем

$$s' = \frac{r_0 + (1 + B \pm \sqrt{1 + B})x}{1 \mp \left(1 + \frac{Bx}{r_0}\right) \sqrt{1 + B}} \quad (93)$$

и далее, освобождаясь от иррациональности в знаменателе,

$$s' = \frac{[r_0 + (1 + B \pm \sqrt{1 + B})x] \left[1 \pm \left(1 + \frac{Bx}{r_0}\right) \sqrt{1 + B}\right]}{1 - (1 + B) \left(1 + \frac{Bx}{r_0}\right)^2}. \quad (94)$$

После перемножения в числителе получаем

$$s' = \frac{r_0 + (1+B)x \pm \left[(r_0 + Bx) \sqrt{1+B} + x \left(1 + \frac{Bx}{r_0} \right) (1+B) \sqrt{1+B} + \right.}{1 - (1+B) \left(1 + \frac{Bx}{r_0} \right)^2} + \frac{\left. + x \sqrt{1+B} \right] + (1+B) \left(1 + \frac{Bx}{r_0} \right) x}{1 - (1+B) \left(1 + \frac{Bx}{r_0} \right)^2} \quad (95)$$

или

$$s' = r_0 \frac{1 + 2(1+B) \frac{x}{r_0} + B(1+B) \frac{x^2}{r_0^2} \pm \sqrt{1+B} \left[1 + 2(1+B) \frac{x}{r_0} + \right.}{-B \left[1 + 2(1+B) \frac{x}{r_0} + B(1+B) \frac{x^2}{r_0^2} \right] + B(1+B) \frac{x^2}{r_0^2}} \cdot \frac{\left. \right]}{-B \left[1 + 2(1+B) \frac{x}{r_0} + B(1+B) \frac{x^2}{r_0^2} \right]} \quad (96)$$

Выполнив сокращения, получаем окончательно

$$s' = -\frac{r_0}{B} (1 \pm \sqrt{1+B}). \quad (97)$$

Это последнее выражение не зависит от текущих координат кривой.

Определим сумму расстояний s'_I и s'_{II} до центров астигматических выходов лучков. Пользуясь формулой (97), находим

$$s'_I + s'_{II} = -\frac{r_0}{B} (1 + \sqrt{1+B} + 1 - \sqrt{1+B}) = -\frac{2r_0}{B}. \quad (98)$$

Обращаясь к формуле (50) и приравнивая ординату y нулю, получаем квадратное уравнение относительно абсциссы x .

Составляя разность значений величин x , получаем длину $2a$ большей оси кривой. Таким образом,

$$0 = 2r_0x + Bx^2, \quad (99)$$

Уравнение (99) имеет своими корнями значения x , равные

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{2r_0}{B} = 2a. \quad (100)$$

Нетрудно видеть, что полученная в формуле (98) сумма отрезков s'_I и s'_{II} равна длине большей оси.

Составим далее разность отрезков s'_I и s'_{II} . Вновь пользуясь формулой (97), получаем

$$s'_I - s'_{II} = -\frac{2r_0}{B} \sqrt{1+B}, \quad (101)$$

Еще раз возвратимся к формуле (50). Задавая значение x равным длине полуоси a и определяя величину ординаты, получим длину малой полуоси b . Находим

$$b^2 = 2r_0 a + \frac{-r_0}{a} a^2 = ar_0. \quad (102)$$

Пользуясь формулой (102), выражение (101) можно представить в виде:

$$s'_I - s'_{II} = 2 \sqrt{a^2 - b^2} = 2c. \quad (103)$$

Согласно формуле (103), приходим к выводу, что расстояние между анастигматическими зрачками кривой второго порядка оказывается равным расстоянию между фокусами (геометрическими!) этой кривой и сами выходные зрачки совпадают с этими фокусами. При этом, конечно, должно соблюдаться условие расположения предмета в бесконечности.

Весьма существенно, что это свойство кривых второго порядка не зависит от величин показателей преломления как с той, так и с другой стороны преломляющей (или отражающей) поверхности.

Так, например, для параболической поверхности анастигматические выходные зрачки оказываются расположенными — один в геометрическом фокусе параболы, а другой — в бесконечности, что будет соответствовать так называемому телецентрическому ходу лучей в пространстве изображений.

Это свойство параболической поверхности, используя ее в сочетании с плоской поверхностью, позволяет построить плоскопараболическую линзу, свободную от астигматизма для предмета, расположенного в бесконечности. Такая линза обладает телецентрическим ходом лучей в пространстве изображений, поэтому ее входной зрачок будет совпадать с ее передним физическим фокусом.

Заметим, что это свойство плоскопараболическая линза сохранит как при плоской первой поверхности, так и при параболической, так как во втором случае плоская поверхность при телецентрическом ходе лучей в пространстве изображений также не сможет внести астигматизма.

Обратимся далее к зеркальным поверхностям второго порядка. В этом случае можно принять, что $n = -n' = 1$.

Совершенно очевидно, что в этом случае углы падения и отражения окажутся равными друг другу и главный луч, прошедший через один анастигматический зрачок, после отражения от поверхности непременно пройдет через второй геометрический фокус; таким образом, зрачок входа также окажется анастигматическим для обратного хода лучей. Более того, нетрудно показать, что для отражающих поверхностей второго порядка можно задать условие отсутствия астигматизма при произвольном положении предмета.

Действительно, обращаясь к формулам (77), после подстановки значений показателей преломления получим

$$\frac{1}{t'} + \frac{1}{t} = \frac{2}{r_t \cos i}, \quad \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2 \cos i}{r_s}. \quad (104)$$

Принимая, что отрезок $s = t$ и $s' = t'$, приравняем формулы (104) друг другу, что снова приведет к формуле (79), и, следовательно, к кривой второго порядка, а это доказывает ранее высказанное положение о произвольности положения предмета для отражательных поверхностей при условии, что главный луч проходит через астигматические зрачки — геометрические фокусы кривой второго порядка.

Выше [см. § 3, формула (59)] было установлено, что, задаваясь условием уничтожения сферической аберрации для бесконечно удаленной точки на оси системы, для случая преломления из среды с большим показателем преломления в среду с меньшим показателем преломления, получаем гиперболическую поверхность.

На основе этого можно осуществить плоскогиперболическую линзу, обращенную к бесконечно удаленному предмету плоской стороной, свободную от сферической аберрации.

Но согласно предшествующему выводу известно, что, задавая положение выходного зрачка такой линзы совпадающим с геометрическим фокусом гиперболы, тем самым обеспечиваем уничтожение астигматизма.

В общем случае можно ожидать, что для такой плоскогиперболической линзы при отсутствии аберрации в выходном зрачке будет наблюдаться сферическая аберрация в зрачке входа.

Однако соответственным подбором толщины линзы можно добиться уничтожения сферической аберрации в зрачке входа для какого-либо одного полевого угла или получить равные значения для сферической аберрации для двух полевых углов.

Тогда, ставя материальную диафрагму в точке, где реальный главный луч пересекает ось, предупредим возникновение астигматизма.

В соответствии с этим можно обеспечить строгое исправление астигматизма для одного из полевых углов при малых остаточных зонах астигматизма либо добиться исправления астигматизма для двух полевых углов одновременно.

Обращаясь к формуле (59) и полагая $n = n$ и $n' = 1$, что соответствует преломлению из стекла в воздух, можно написать

$$y^2 = -2s'_0 x (n - 1) + (n^2 - 1) x^2. \quad (105)$$

Но

$$-2s'_0 (n - 1) = 2r_0, \quad r_0 = -(n - 1) s'_0. \quad (106)$$

Кроме того, коэффициент при x^2 должен быть равен коэффициенту B . Таким образом,

$$B = n^2 - 1, \quad n^2 = B + 1. \quad (107)$$

С другой стороны, пользуясь формулой (97), можно определить расстояние анастигматических зрачков от вершины поверхности. Согласно формуле (107), получаем

$$s' = -\frac{r_0}{B} (1 \pm \sqrt{1+B}) = -\frac{r_0}{n^2-1} (1 \pm n). \quad (108)$$

Формула (108) дает два значения отрезков, определяющих положения анастигматических зрачков выхода,

$$s'_{I} = \frac{r_0}{1-n} = s'_0, \quad s'_{II} = \frac{r_0}{1+n} = -\frac{n-1}{n+1} s'_0. \quad (109)$$

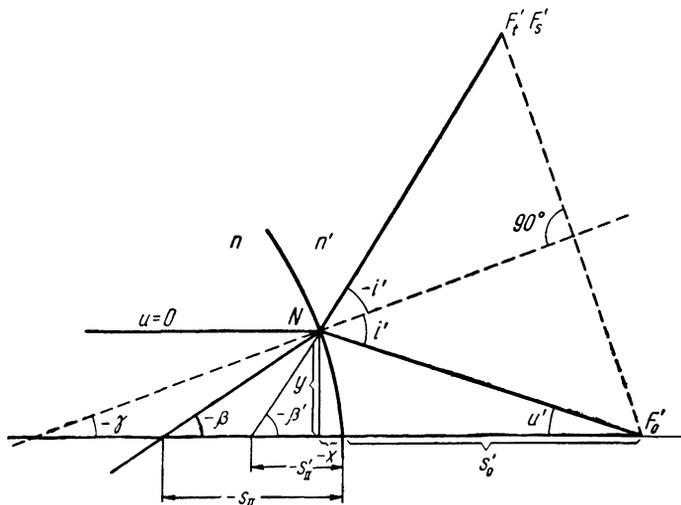


Рис. 6.

Первое значение отрезка, определяющее положение анастигматического зрачка, совпадающее с положением изображения бесконечно удаленной точки, не представляет практического интереса; однако второе решение и является тем, о котором говорилось выше.

Обратимся к рис. 6, где представлен ход главного луча, идущего после какой-либо несферической поверхности. Координаты точки пересечения луча с поверхностью обозначим, как обычно, x и y ; полевой угол $-\beta'$ и отрезок главного луча от вершины поверхности — s' . Согласно рис. 6 можно написать

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{y}{s' - x} \quad (110)$$

или для нашего случая

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{y}{\frac{r_0}{n+1} - x}. \quad (111)$$

Ранее была получена формула (89) для тангенса угла i' преломленного луча с нормалью в случае астигматических зрачков. Пользуясь полученным значением коэффициента B , согласно формуле (107) это выражение может быть преобразовано:

$$\operatorname{tg} i' = \frac{1}{r_0} \sqrt{(1+B)(2r_0+Bx)x} = \frac{ny}{r_0}. \quad (112)$$

Наконец, пользуясь формулами (18) и (52), нетрудно определить величину тангенса угла γ . Находим

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2y}{A+2Bx} = \frac{2y}{2r_0+2(n^2-1)x} = \frac{y}{r_0+(n^2-1)x}. \quad (113)$$

Имея в своем распоряжении величины s'_0 , n , x и y и определяя с помощью формул (110), (112) и (113) величины углов β' , i' и γ и пользуясь законом преломления, можем найти угол i и все интересные величины — отрезки главного и нулевого луча в пространстве перед гиперболической поверхностью.

Для иллюстрации рассмотрим числовой пример. Задаваясь величиной отрезка $s'_0 = 100,00$ и показателем преломления $n = 1,6126$, можем определить радиус кривизны r_0 в вершине поверхности; он равен $-61,2600$.

При этих исходных данных уравнение поверхности будет

$$y^2 = -122,52x + 1,6008x^2.$$

Примем абсциссу точки преломления главного луча равной $2,00$. Согласно уравнению величина ординаты $y = 13,189$; величины углов i' , β' и γ соответственно равны:

$$i' = 22,656^\circ, \quad \beta' = 36,482^\circ \quad \text{и} \quad \gamma = 13,820^\circ.$$

Определяем далее угол i :

$$i = 13,820^\circ = \gamma.$$

Это равенство нетрудно объяснить тем, что, изменяя знак угла i при сохранении той же самой точки преломления луча на поверхности, получаем падающий луч, параллельный оси системы. Тогда после преломления астигматическая точка попадет в анаберрационную точку поверхности, расположенную в заднем фокусе поверхности. Имея в виду, что расстояния от точки преломления луча до обоих астигматических точек равны друг другу, можем сделать вывод, что в нашем случае анаберрационной гиперболической поверхности расстояние до астигматической точки на главном луче от точки преломления будет всегда равно радиусу-вектору точки преломления.

Нетрудно определить положение точки пересечения главного луча с осью поверхности перед его преломлением. Находим

$$s_{II}' = -23,448, \quad s_{II} = -32,280.$$

Для нулевого луча, проходящего через зрачок выхода, точка его пересечения с осью перед поверхностью отстоит от вершины поверхности на расстоянии, равном

$$s_{0II} = -30,6300.$$

Разность расстояний s_{II} и s_{0II} перед преломляющей поверхностью определит абберацию в зрачке перед преломляющей поверхностью:

$$\Delta s_{II} = -1,6500.$$

Выше говорилось о возможности устранить эту абберацию подбором соответственной толщины линзы. Отношения отрезков до и после преломления на плоской поверхности будут равны: для главного луча — отношению тангенсов углов падения и преломления, для нулевого луча — величине показателя преломления. Поэтому, полагая, что перед плоской поверхностью оба отрезка равны друг другу, легко определить величины отрезков s'_1 и s'_{01} после плоской поверхности

$$s'_{01} = ns_{01}, \quad s'_1 = \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} s_{01}. \quad (114)$$

Приравнивая разность отрезков $s'_1 - s'_{01}$ после преломления на плоской поверхности к разности отрезков перед гиперболической поверхностью, нетрудно найти величину переднего отрезка s_{01} и значение толщины нашей плоскогиперболической линзы. Выпишем все эти величины для нашего примера

$$s_{01} = -3,054; \quad \beta_1 = -48,427^\circ;$$

$$r_1 = \infty;$$

$$d = 25,705; \quad n = 1,6126;$$

$$r_2 = -61,26;$$

$$s'_0 = 100,000; \quad s'_{II} = -23,448; \quad \beta' = -36,482^\circ;$$

$$x = -2,00; \quad y = 13,189.$$

Уравнения гиперболы:

$$y^2 = -122,52x + 1,6008x^2.$$

Условимся обозначать (как это и сделано в нашем примере) размещением значения радиуса между скобками) (что поверхность представляет собой гиперболу, и в случае, когда значение радиуса записано между скобками (), — эллипс; для обозначения параболы будем пользоваться одной скобкой перед значением радиуса, в соответствии с ориентировкой поверхности.

§ 5. Дисторсия плоскопараболической линзы

Переходя к рассмотрению других aberrаций линз, ограниченных поверхностью второго порядка, рассмотрим дисторсию плоскопараболической линзы, обращенной к бесконечно удаленному предмету своей плоской стороной (рис. 7). Как было установлено ранее, для такой линзы астигматизм отсутствует в случае, когда выходной лучок либо совпадает с геометрическим фокусом параболы, либо удален в бесконечность. Для этого последнего случая в силу телецентричности хода лучей после линзы величина ординаты точки преломления

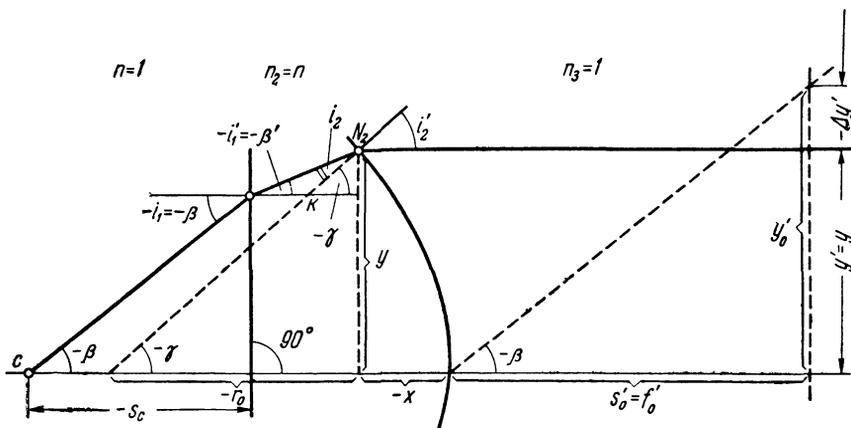


Рис. 7.

главного луча на параболической поверхности равна величине изображения; таким образом, запишем, помня, что y' можно выразить через r_0 и $\text{tg } \gamma$,

$$y = y' = r_0 \text{tg } \gamma. \quad (115)$$

Далее, пользуясь рис. 7, легко установить соотношение

$$-\gamma = -\beta' + i_2, \quad (116)$$

откуда

$$\beta' = i_2 + \gamma = i_2 - i_2'. \quad (117)$$

Пользуясь законом преломления, можно найти и входной полевой угол β . Получаем

$$\sin \beta = n \sin \beta' = n \sin (i_2 - i_2') = n (\sin i_2 \cos i_2' - \sin i_2' \cos i_2) \quad (118)$$

и после некоторых преобразований

$$\sin \beta = \sin i_2' (\cos i_2' - n \cos i_2). \quad (119)$$

Имея угол β , получим и величину неискаженного изображения по известной формуле для системы в воздухе

$$y'_0 = -f'_0 \operatorname{tg} \beta = \frac{r_0}{n-1} \operatorname{tg} \beta. \quad (120)$$

Составляя разность величин y' и y'_0 , находим дисторсию

$$\Delta y' = y' - y'_0 = -r_0 \left(-\operatorname{tg} \gamma + \frac{\operatorname{tg} \beta}{n-1} \right). \quad (121)$$

Разделяя выражение (121) на величину неискаженного изображения y'_0 , получаем относительную дисторсию

$$\Delta\% = - \left[1 - (n-1) \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta} \right] \cdot 100\%. \quad (122)$$

Из формулы (115) следует, что при сохранении неизменной величины радиуса r_0 и $\operatorname{tg} \gamma$ величина действительного изображения останется постоянной.

При изменении в формуле (119) показателя преломления изменится величина входного полевого угла β , причем одновременно будет изменяться и величина фокусного расстояния f'_0 . Вследствие этого произойдет изменение величины неискаженного изображения y'_0 (в противном случае изменение тангенса входного полевого угла было бы пропорционально $n-1$), что приведет к изменению дисторсии.

Т а б л и ц а 1

$n = 1,6126$		$n = 1,531$		$n = 1,5492$	
2β	$\Delta, \%$	2β	$\Delta, \%$	2β	$\Delta, \%$
$33^\circ 22'$	+0,1	$60^\circ 00'$	+0,7	$56^\circ 42'$	+1,8
$106^\circ 00'$	-7,9	$90^\circ 40'$	-1,0	$94^\circ 00'$	+2,4
		$128^\circ 00'$	-14,85	$119^\circ 00'$	-3,08

Изменение дисторсии при различных значениях полевых углов и показателей преломления показано в табл. 1.

Как видно из таблицы, при соответственном подборе показателя преломления для плоскопараболической линзы можно добиться исправления дисторсии для поля зрения почти в 120° .

Такая плоскопараболическая линза свободна от астигматизма на таком же большом поле зрения, имеет небольшую сферическую aberrацию и к тому, обладает телецентрическим ходом и имеет удаление входного зрачка, почти равное ее фокусному расстоянию. В силу этого ее выгодно использовать в качестве основного элемента при создании широкоугольных окуляров и в проекционных системах с телецентрическим ходом лучей при хорошей ортоскопии.

§ 6. Кома плоскопараболической линзы

Рассмотрение комы плоскопараболической линзы ограничим случаем, когда предмет лежит в бесконечности, линза обращена к предмету плоскостью и соблюдается условие уничтожения астигматизма.

На рис. 8 показан ход двух параллельных лучей, имеющих на параболической поверхности углы падения и преломления $i, i + di$

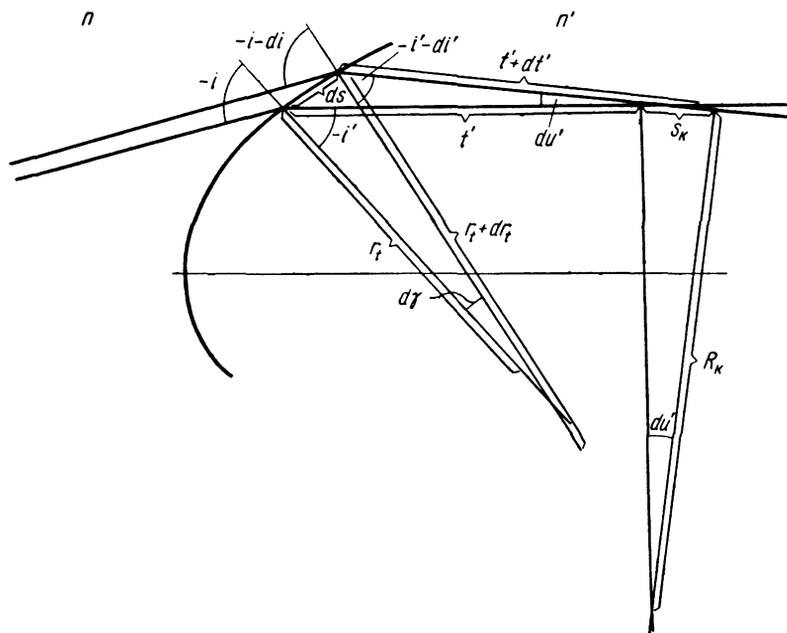


Рис. 8.

и $i', i' + di'$. Угол между нормальными обоим преломленным лучей примем равным $d\gamma$, расстояния до меридиональных фокусов вдоль лучей — равными t' и $t' + dt'$. Дугу между точками преломления обозначим ds , радиусы кривизны обозначим r_t и $r_t + dr_t$.

Радиус кастики, определяющий величину комы, обозначим R_K . Из рис. 8 следует, что

$$-\sin i' ds + t' + dt' = t' + R_K du', \quad (123)$$

откуда

$$R_K = \frac{-\sin i' ds + dt'}{du'}. \quad (124)$$

Апертурный угол находим из того же рис. 8.

$$du' = \frac{\cos i' ds}{t'}, \quad (125)$$

и тогда формула (124) преобразуется в

$$R_{\kappa} = \left(\frac{dt'}{\cos i' ds} - \operatorname{tg} i' \right) t'. \quad (126)$$

Из меридионального инварианта (при $t = \infty$) следует

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_t}. \quad (127)$$

Логарифмически дифференцируя формулу (127), находим

$$-\frac{dt'}{t'} - 2 \operatorname{tg} i' di' = -\frac{dr_t}{r_t} - \frac{n' \sin i' di' - n \sin i di}{n' \cos i' - n \cos i}, \quad (128)$$

откуда

$$\frac{dt'}{t'} = \frac{dr_t}{r_t} - 2 \operatorname{tg} i' di' + \frac{di' - di}{n' \cos i' - n \cos i} n' \sin i'. \quad (129)$$

Дифференцируя закон преломления, получаем

$$\frac{di'}{\operatorname{tg} i'} = \frac{di}{\operatorname{tg} i}; \quad (130)$$

тогда

$$\frac{dt'}{t'} = \frac{dr_t}{r_t} - 2 \operatorname{tg} i' di' + \frac{\left(1 - \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i'}\right) n' \sin i'}{n' \cos i' - n \cos i} di' \quad (131)$$

или

$$\frac{dt'}{t'} = \frac{dr_t}{r_t} - (2 \operatorname{tg} i' + \operatorname{tg} i) di'. \quad (132)$$

Но для параболы имеет место

$$r_t = \frac{r_s^3}{r_0^2} = \frac{r_0^3}{r_0^2 \cos^3 \gamma} = \frac{r_0}{\cos^3 \gamma}. \quad (133)$$

Логарифмически дифференцируя эту формулу, получаем

$$\frac{dr_t}{r_t} = -\frac{d(\cos^3 \gamma)}{\cos^3 \gamma} = 3 \operatorname{tg} \gamma d\gamma. \quad (134)$$

Пользуясь этим выражением, формула (132) может быть преобразована:

$$\frac{dt'}{t'} = 3 \operatorname{tg} \gamma d\gamma - (2 \operatorname{tg} i' + \operatorname{tg} i) di'. \quad (135)$$

Возвращаясь к формуле (126), выразим ds через произведение $r_t d\gamma$ и, пользуясь формулой (135), найдем

$$R_{\kappa} = \left\{ \frac{t'}{r_t \cos i' d\gamma} [3 \operatorname{tg} \gamma d\gamma - (2 \operatorname{tg} i' + \operatorname{tg} i) di'] - \operatorname{tg} i' \right\} t'. \quad (136)$$

Деля числитель и знаменатель в множителе перед квадратными скобками на величину $n \sin i = n' \sin i'$ и помня выражение (127), получаем

$$R_K = \left\{ - \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i' - \operatorname{tg} i} \left[3 \operatorname{tg} \gamma - (2 \operatorname{tg} i' + \operatorname{tg} i) \frac{di'}{d\gamma} \right] - \operatorname{tg} i' \right\} t'. \quad (137)$$

Так как для отсутствия астигматизма необходимо, чтобы

$$\gamma = \pm i', \quad (138)$$

то радиус каустики R_K принимает два значения:

$$R_{K1} = -(\operatorname{tg} i' + \operatorname{tg} i) t', \quad R_K = -(\operatorname{tg} i' - \operatorname{tg} i) t', \quad (139)$$

$$\gamma = i' \quad \gamma = -i'$$

соответствующие двум положениям анастигматических зрачков. Второе значение радиуса каустики соответствует случаю телецентрического хода главного луча в пространстве изображений.

По своей абсолютной величине радиус комы в первом случае (ближнее положение входного зрачка) больше, нежели во втором, при $n = 1,5$ примерно втрое.

Знак радиуса комы в обоих случаях различен; это означает, что при переходе от одного положения выходного зрачка к другому кома плоскопараболической линзы переходит через нуль.

§ 7. Полевая сферическая aberrация плоскопараболической линзы

Меридиональная сферическая aberrация в наклонных пучках может быть охарактеризована величиной радиуса $R_{\text{сф}}$ эволюты каустики. Обращаясь к рис. 9, видим, что при переходе от одного луча к другому радиус кривизны каустики претерпевает некоторое приращение dR_K и величину $R_{\text{сф}}$ можно определить как отношение

$$R_{\text{сф}} = \frac{dR_K}{du'}. \quad (140)$$

Но, как это видно из формулы (137), общее выражение для радиуса каустики R_K уже достаточно сложно, поэтому обработка формулы (140) оказывается весьма громоздкой. Вместе с тем, руководствуясь некоторыми общими соображениями, сравнительно легко можно получить качественное представление об изменении величины меридиональной

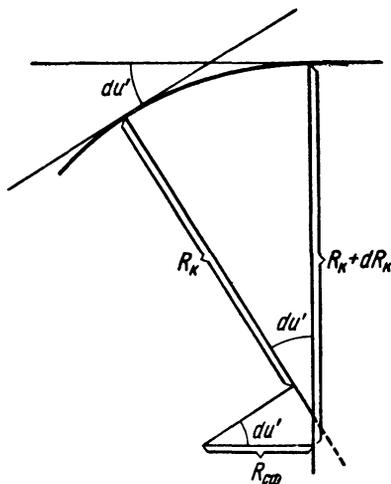


Рис. 9.

сферической aberrации. Порядок же величины меридиональной сферической aberrации можно установить численным расчетом хода лучей через параболическую поверхность. На рис. 10 показано преломление двух параллельных лучей на одном и том же участке параболической поверхности с углами падения и преломления главных лучей, равными по величине, но противоположными по знаку.

Оба пучка имеют различную по величине кому; однако сферическая aberrация в таких пучках, как четная aberrация, будет одинаковой.

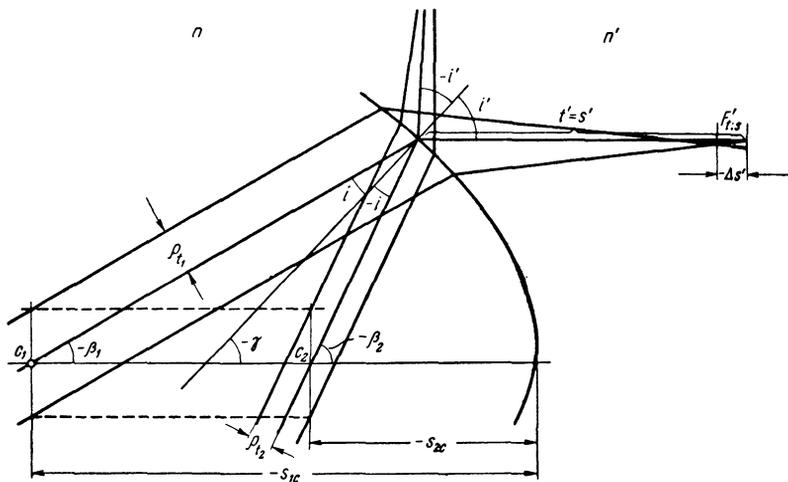


Рис. 10.

накова (для обоих пучков будет сохраняться одна и та же величина радиуса эволюты каустики).

Вместе с тем величина входного полевого угла β_1 для дальнего положения входного зрачка по абсолютной величине меньше полевого угла β_2 для ближнего положения входного зрачка на величину удвоенного угла падения луча $2i$.

Полагая величину входного отверстия для обоих положений зрачков одинаковой, можно показать, что сечения обоих пучков, перпендикулярные их главным лучам, различны: пучок, проходящий через дальний зрачок, несколько шире, нежели пучок, проходящий через ближний зрачок.

Ширина того и другого пучка определится соотношением

$$\frac{Q_{t1}}{\cos \beta_1} = \frac{Q_{t2}}{\cos \beta_2} \quad (141)$$

Ввиду этого меридиональная полевая сферическая aberrация в плоскости, перпендикулярной главному лучу, несколько меньше для ближнего положения зрачка, чем для дальнего.

Величина расстояния вдоль луча (до фокусов бесконечно тонких пучков) в случае отсутствия астигматизма получается для обоих положений зрачков одинаковой и равной, согласно формуле (78),

$$t' = s' = \frac{n'r_s}{n' \cos i' - n \cos i} . \quad (142)$$

Помня, что расстояние до фокуса осевого пучка (нулевого) для преломляющей поверхности определяется формулой

$$s'_0 = \frac{n'r_0}{n' - n} , \quad (143)$$

составим отношение

$$\frac{t'}{s'_0} = \frac{r_s}{r_0} \cdot \frac{n' - n}{n' \cos i' - n \cos i} = \frac{n' - n}{(n' \cos i' - n \cos i) \cos i'} > 1, \quad (144)$$

которое показывает, что расстояния до фокусов вдоль главного луча больше расстояния до фокуса на оси поверхности. Поэтому вдоль главного луча на одной и той же ширине наклонного и осевого пучков выходная апертура в наклонных пучках меньше, нежели в осевом пучке.

Следовательно, и меридиональная сферическая aberrация в наклонных пучках меньше, чем поперечная сферическая aberrация в осевом пучке. Все высказанные соображения подтверждаются величинами поперечных сферических aberrаций, вычисленных для плоскопараболической линзы со следующими данными:

$$r_1 = \infty,$$

$$d = 29,63 \quad n = 1,5163, \quad s'_0 = f'_0 100,00,$$

$$r_2 = -51,63$$

Входные полевые углы для дальнего и ближнего положений входных зрачков соответственно равны $-5^\circ 37' 28''$ и $-27^\circ 40' 52''$; зрачки находятся от первой поверхности линзы на расстояниях, соответственно равных $-81,2675$ и $-1,1905$.

Величины поперечной сферической aberrации как для осевого, так и для наклонных пучков приведены в табл. 2 для одной и той же высоты q_t на зрачках (перпендикулярно главным лучам)

Т а б л и ц а 2

	Осевого пучок	Ближний зрачок	Дальний зрачок	Дальний зрачок
s_1	—	$-1,1905$	$-81,2675$	$-82,04$
β_1	0°	$-27^\circ 40' 52''$	$-5^\circ 37' 28''$	$-7^\circ 51' 22''$
q_t	$+15$	± 15	± 15	± 15
σ_t	$-0,866$	$\pm 0,735$	$\pm 0,713$	$\pm 1,28$

ГЛАВА III

ПРОСЧЕТ ЛУЧЕЙ ЧЕРЕЗ НЕСФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

§ 8. Просчет лучей через несферические поверхности второго порядка (эллипс, гиперболу, параболу)

Существует ряд формул для просчета лучей через несферические поверхности второго порядка, выводимых из тех или иных геометрических соображений. Однако все эти формулы требуют различных построений для различных кривых, что в известной степени усложняет их применение, заставляя пользоваться для различных кривых различными формулами. Чтобы избежать этого, воспользуемся методом решения системы уравнений профиля преломляющей поверхности и уравнения падающего на поверхность луча и получим единые формулы для всех кривых второго порядка.

Зададимся уравнением кривой второго порядка, отнесенным к вершине кривой

$$y^2 = Ax + Bx^2 \quad (145)$$

и уравнением луча, падающего на преломляющую поверхность,

$$y = ax + b. \quad (146)$$

Точки пересечения луча с поверхностью определяют, решая совместно систему уравнений (145) и (146). Это решение можно получить, исключая какую-либо одну из независимых переменных — x или y . Таким образом, напишем

$$a^2x^2 + 2abx + b^2 = Ax + Bx^2 \quad (147)$$

или

$$y^2 = A \frac{y-b}{a} + B \left(\frac{y-b}{a} \right)^2. \quad (148)$$

Решая любое из этих уравнений, можно определить либо абсциссу x , либо ординату y точки пересечения луча с поверхностью. Однако необходимо заметить, что в ряде случаев величина x сравнительно небольшая по абсолютной величине и поэтому при дальней-

шем определении величин y не исключена потеря точности. В силу этого предпочтительнее воспользоваться вторым квадратным уравнением, находя вначале величину y .

Решая уравнение (148) относительно y , после сокращений получаем

$$y = \frac{Aa - 2Bb \pm a \sqrt{A^2 - 4b(aA - bB)}}{2(a^2 - B)}. \quad (149)$$

Обратимся к рис. 11, где представлен ход луча в системе координат, совпадающей своим началом с вершиной преломляющей поверхности.

Нетрудно видеть, что величины s и u , определяющие ход луча относительно преломляющей поверхности, будут связаны с коэффициентами a и b соотношениями

$$a = -\operatorname{tg} u \\ \text{и } b = s \operatorname{tg} u, \quad (150)$$

Кроме того, величина коэффициента A , входящего в уравнение профиля поверхности, равна удвоенному радиусу кривизны поверхности в ее вершине

$$A = 2r_0. \quad (151)$$

Подставляя величины a , b и A из формул (150) и (151) в формулу (149), находим

$$y = \frac{1 + \frac{s}{r_0} B \pm \sqrt{1 + \frac{s}{r_0} \left(2 + \frac{s}{r_0} B\right) \operatorname{tg}^2 u}}{\frac{B}{\operatorname{tg} u} - \operatorname{tg} u} r_0. \quad (152)$$

В частном случае параболы коэффициент B обращается в нуль. Тогда выражение (152) приобретает особенно простой вид:

$$y = -\frac{r_0}{\operatorname{tg} u} \left(1 \pm \sqrt{1 + 2\frac{s}{r_0} \operatorname{tg}^2 u}\right). \quad (153)$$

Абсцисса x легко определяется по уравнению (146).

Имея в своем распоряжении величины x и y , пользуясь формулами (18) и (52), нетрудно определить угол γ нормали в точке преломления луча с направлением оси системы

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{y}{r_0 + Bx}. \quad (154)$$

Для параболы, в связи с равенством коэффициента B нулю, формула (152) упрощается:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{y}{r_0}. \quad (155)$$

Далее нетрудно получить угол падающего луча с нормалью по формуле, аналогичной формуле (28):

$$i = u - \gamma. \quad (156)$$

Вслед за этим, на основании формулы (27), определяем угол i' преломленного луча с нормалью.

Угол u' преломленного луча с осью системы равен

$$u' = i' + \gamma. \quad (157)$$

Величина отрезка s' точки пересечения луча с осью от вершины поверхности равна

$$s' = \frac{y}{\operatorname{tg} u'} + x. \quad (158)$$

Для просчета астигматизма через несферическую поверхность второго порядка понадобится определить величины меридионального и сагиттального радиусов кривизны поверхности в точке преломления луча по формулам (22) и (55):

$$r_s = \frac{y}{\sin \gamma}, \quad r_t = \frac{r_s^3}{r_0^2}. \quad (159)$$

Имея значения радиусов кривизны несферической поверхности, переход через эту поверхность может быть осуществлен по меридиональному и сагиттальному инвариантам [формулы (41), (42) и (47), (48)]; переход от поверхности к поверхности можно выполнить, определив предварительно косую толщину \bar{d} — расстояние вдоль луча между точками его преломления на предыдущей и последующей поверхностях, легко определяемое по формуле

$$\bar{d}_s = \left| \frac{h_{s+1} - h_s}{\sin u_{s+1}} \right|, \quad (160)$$

где h_s и h_{s+1} — высоты на предыдущей и последующей поверхностях; заметим, что для несферической поверхности величина высоты h равна ординате y точки преломления луча.

Переход от отрезков после преломляющей поверхности к отрезкам перед последующей поверхностью осуществится согласно формуле

$$t_{s+1} = t'_s - \bar{d}_s, \quad s_{s+1} = s'_s - \bar{d}_s. \quad (161)$$

§ 9. Просчет лучей через поверхности высшего порядка

Основной трудностью в решении задачи просчета луча через несферические поверхности высшего порядка является определение точки встречи луча с поверхностью. Действительно, если профиль несферической поверхности определяется уравнением высшего порядка, то и задача совместного решения системы уравнений луча и поверхности также сводится к решению задачи уравнения высшего порядка.

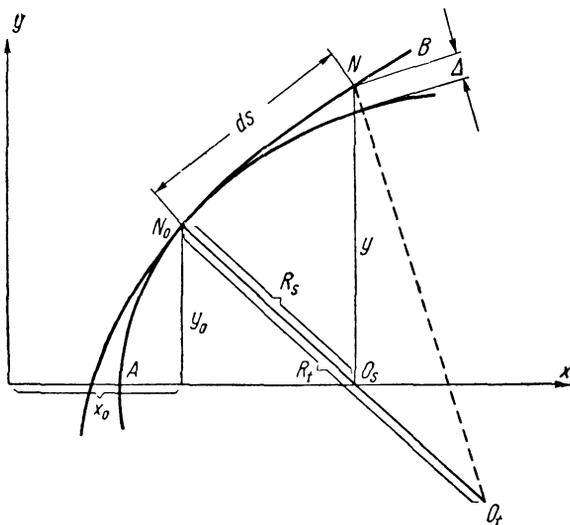


Рис. 12.

Однако в некоторых случаях решения этой задачи можно избежать, задавая ход лучей от несферической поверхности в прямом и обратном ходе; но такой прием далеко не всегда возможен. Поэтому представляется необходимым выработать некоторые приемы определения точки пересечения луча с несферической поверхностью, прибегая к приближенным формулам, последовательное применение которых позволит получить координаты точки встречи луча с поверхностью с заданной точностью.

а. Метод определения точки пересечения луча с преломляющей поверхностью, основанный на использовании дуги соприкасающейся окружности. Обратимся к рис. 12, где представлена образующая несферической поверхности высшего порядка AN_0NB ; O_t — центр меридиональной кривизны образующей для некоторой точки N_0 ; r_t — радиус кривизны поверхности в меридиональной плоскости; r_s — радиус кривизны поверхности в сакитальной плоскости.

Предполагается, что луч, падающий на указанную несферическую поверхность, пересечет ее в некоторой точке N , отстоящей от точки N_0 на некоторый отрезок дуги кривой d_s . Определим расхождение координат точек встречи луча с образующей несферической поверхности и с соприкасающейся окружностью.

Уравнение образующей несферической поверхности зададим во внутренней системе координат, полагая, что меридиональный радиус кривизны r_t является некоторой функцией от длины дуги образующей s . Таким образом, можно написать

$$r_t = r_t(s). \quad (162)$$

Уравнение соприкасающейся окружности примет вид

$$r_t = r_0 = \text{const} = r_t(s_0). \quad (163)$$

Составим разность меридионального радиуса кривизны несферической поверхности для какой-либо произвольной точки кривой, определяемой дугой s , и радиуса кривизны соприкасающейся окружности, построенной для точки кривой, определяемой дугой s_0 .

$$\Delta r_t = r_t - r_0 = r_t(s) - r_t(s_0). \quad (164)$$

Разлагая функцию $r_t(s)$ в ряд по степеням разности $\Delta s = s - s_0$, получим

$$\Delta r_t = r'_t(s_0) \Delta s + \frac{r''_t(s_0)}{1 \cdot 2} \Delta s^2 + \dots \quad (165)$$

Построим эволюту кривой $r_t = r_t(s)$. На рис. 13 $N_0N = s$ — дуга кривой $r_t(s)$, O и O_N — положения центров кривизны для точек N_0 и N соответственно; по свойству эволюты длина ее дуги $s_K = OO_N$ должна быть равна разности радиусов кривизны r_t и r_0 . Таким образом, находим

$$\Delta r_t = r_t - r_0 = s_K. \quad (166)$$

Углы между нормальными, между исходной кривой и ее эволютой, как известно, сохраняются неизменными; таким образом, в первом приближении определим величину радиуса кривизны эволюты

$$R_K = \frac{s_K}{\alpha} = \frac{s_K}{s_0} r_0 = \frac{\Delta r_t}{s_0} r_0. \quad (167)$$

Попытаемся определить величину расхождения Δ между кривой $r_t(s)$ и дугой окружности радиуса r_0 (N_0N'), соприкасающейся с кривой $r_t(s)$ в точке N_0 . Из рис. 13 следует

$$r_t = \Delta + N'M + MO_N, \quad (168)$$

откуда

$$\Delta = r_t - N'M - MO_N. \quad (169)$$

Считая длину дуги s малой величиной первого порядка малости, а также полагая, что длина дуги s_K эволюты является малой величиной первого порядка малости (а это вполне возможно, так как при обращении дуги s в нуль дуга s_K также обращается в нуль), легко устанавливаем, что перпендикуляр OM , опущенный из точки O на направление радиуса r_t в точке N , является малой величиной второго порядка малости. Последнее повлечет за собой малость второго порядка для угла $\Delta\alpha$.

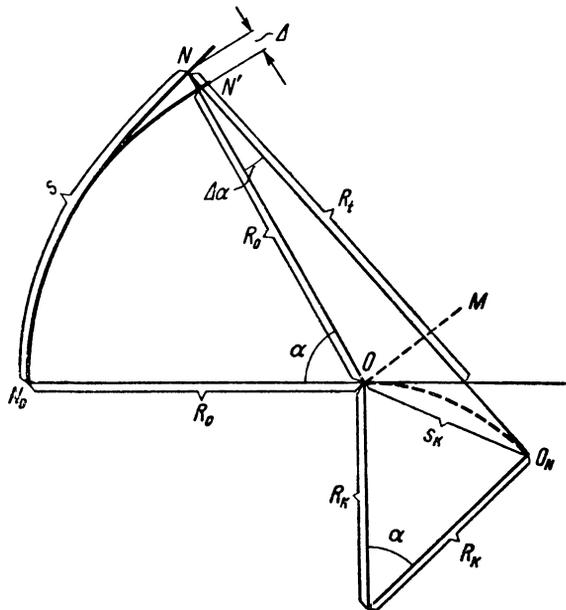


Рис. 13.

Обращаясь к формуле (169), представим ее в виде

$$\Delta = \Delta r_t + r_0 - r_0 \cos \Delta\alpha - R_K \sin \alpha \quad (170)$$

или приближенно

$$\Delta = \Delta r_t + r_0 - r_0 \left(1 - \frac{\Delta\alpha^2}{2}\right) - R_K \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6}\right). \quad (171)$$

Отбрасывая величины четвертого порядка малости и выше, находим

$$\Delta = \Delta r_t - R_K \alpha + R_K \frac{\alpha^3}{6} \quad (172)$$

и, учитывая формулу (167),

$$\Delta = \Delta r_t - s_K + R_K \frac{\alpha^3}{6} = R_K \frac{\alpha^3}{6}, \quad (173)$$

или

$$\Delta = \frac{\Delta r_t}{s} r_0 \frac{\alpha^3}{6}. \quad (174)$$

Обращаясь к формуле (165), представим отношение Δr_t к дуге s как первую производную $r'_t(s_0)$.

Таким образом,

$$\Delta = r'_t(s_0) r_0 \frac{\alpha^3}{6} = \frac{r'_t(s_0)}{6r_0^2} s^3. \quad (175)$$

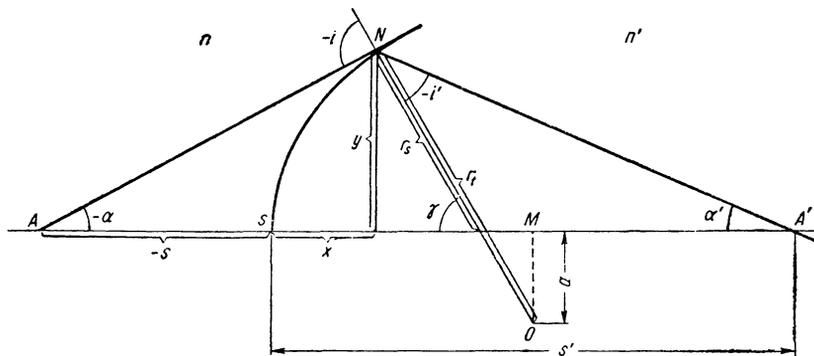


Рис. 14.

Из формулы (175) следует, что величина расхождения между кривой $r_t(s)$ и соприкасающейся окружностью определится кубом длины дуги.

Обратимся к численному примеру. Примем

$$r_0 = 100 \text{ мм}, \quad r'_t(s_0) = 10, \quad s = 1 \text{ мм}.$$

Согласно формуле (175), величина расхождения

$$\Delta = \frac{10}{6 \cdot 100^2} s^3 = 1,67 \cdot 10^{-4} s^3 = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ мм},$$

т. е. она немногим более единицы четвертого знака. Принимая величину $s = 0,3 \text{ мм}$, определим

$$\Delta = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ мм},$$

что соизмеримо с ошибкой, наблюдаемой при вычислениях с шестизначными логарифмическими таблицами.

Перейдем к выводу формул для составления схемы просчета луча через несферическую поверхность высшего порядка (рис. 14).

На чертеже представлена картина преломления луча ANA' через несферическую поверхность высшего порядка, заданную уравнением

$$y^2 = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots \quad (176)$$

Для обеспечения просчета луча необходимо определить величины меридионального и сагиттального радиусов кривизны указанной поверхности в точке встречи луча с поверхностью, определенной координатами x и y .

Величина тангенса угла γ нормали с осью к поверхности в точке N определится согласно формуле (18):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{y'}. \quad (177)$$

Дифференцируя формулу (176), находим

$$2yy' = A + 2Bx + 3Cx^2 + \dots, \quad (178)$$

откуда нетрудно определить величину тангенса угла

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2\sqrt{Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots}}{A + 2Bx + 3Cx^2 + \dots}. \quad (179)$$

Величина сагиттального радиуса кривизны легко может быть найдена по формуле

$$r_s = \frac{y}{\sin \gamma}. \quad (180)$$

Величина меридионального радиуса кривизны находится по формуле (25):

$$r_t = -\frac{r_s^3}{y^3 y''}. \quad (181)$$

Дифференцируя формулу (178), получаем

$$2yy'' + 2y'^2 = 2B + 6Cx + \dots, \quad (182)$$

откуда

$$yy'' = -\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \gamma} + B + 3Cx + \dots. \quad (183)$$

Величина радиуса

$$r_t = -\frac{r_s^3}{y^2 \left(-\frac{r_s^2}{y^2} + 1 + B + 3Cx + \dots \right)} \quad (184)$$

или

$$r_t = \frac{r_s^3}{r_s^2 - y^2 (1 + B + 3Cx + \dots)} \quad (185)$$

Заменяя величину y^2 его выражением через x , получим

$$r_t = \frac{r_s^3}{r_s^2 - (Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots) (1 + B + 3Cx + \dots)} \quad (186)$$

Можно представить выражение для r_t и в виде

$$r_t = \frac{r_s}{1 - \frac{y^2}{r_s^2} (1 + B + 3Cx + \dots)} = \frac{r_s}{1 - \sin^2 \gamma (1 + B + 3Cx + \dots)} \quad (187)$$

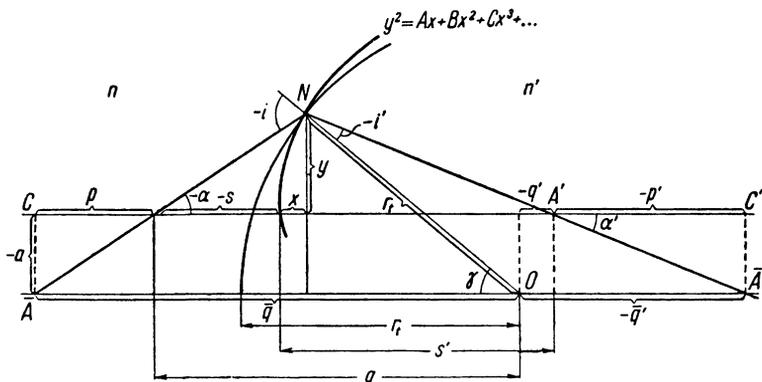


Рис. 15.

или

$$r_t = \frac{r_s}{\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma (B + 3Cx + \dots)} \quad (188)$$

Определим величину смещения a центра соприкасающейся окружности с оси системы. Обращаясь к рис. 15, где представлена картина расположения соприкасающейся окружности, нетрудно определить величину

$$y - a = r_t \sin \gamma, \quad (189)$$

$$a = y - r_t \sin \gamma, \quad (190)$$

Переход к просчету луча через соприкасающуюся окружность требует определения величин \bar{q} и \bar{q}' вдоль смещенной оси, что можно сделать через вспомогательные величины p и p' ; эти величины, согласно рис. 15, могут быть выражены через углы u и u' падающего и преломленного лучей с осью системы, и тогда

$$a = p \operatorname{tg} u = p' \operatorname{tg} u'. \quad (191)$$

Таким образом, для величин \bar{q} и \bar{q}' могут быть получены следующие выражения:

$$\bar{q} = p - s + x + r_t \cos \gamma = \frac{a}{\operatorname{tg} u} - s + x + r_t \cos \gamma, \quad (192)$$

и аналогично

$$\bar{q}' = \frac{a}{\operatorname{tg} u'} - s' + x + r_t \cos \gamma; \quad (193)$$

переход через соприкасающуюся окружность можно произвести по обычным формулам для просчета луча. В соответствии с этим

$$\sin i = \frac{\bar{q}'}{r_t} \sin u, \quad (194)$$

$$\sin i' = \frac{n}{n'} \sin i, \quad (195)$$

$$u' = u - i + i', \quad (196)$$

$$\bar{q}' = r_t \frac{\sin i'}{\sin u'}. \quad (197)$$

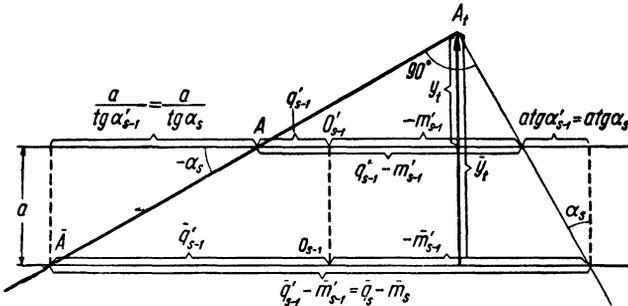


Рис. 16.

Далее, согласно формуле (193), нетрудно определить величину отрезка s' после несферической поверхности:

$$s' = \frac{a}{\operatorname{tg} u'} + x - \bar{q}' + r_t \cos \gamma. \quad (198)$$

Пользуясь формулами (179), (180), (188), (190), (193) — (198), можно осуществить последовательный переход через несферическую поверхность.

Перейдем теперь к выводу формул для просчета меридионального пучка (рис. 16).

На этом чертеже представлен ход главного луча $\bar{A}A_t$, пересекающего начальную ось системы в точке A и ось, проходящую через центр меридионального соприкасающегося радиуса кривизны в точке \bar{A} ; точка A_t определяет положение меридионального изображения.

Углы главного луча со старой и новой осями обозначим $u'_{s-1} = u_s$. Ординату точки A_t относительно старой оси обозначим y_t , относительно новой оси — \bar{y}_t .

Восстанавливая в точке A_t перпендикуляр к главному лучу, определим отрезки m'_{s-1} и \bar{m}'_{s-1} до центров O_{s-1} и O'_{s-1} предшествовавшей преломляющей поверхности. Как известно, величины m_s и m'_s до и после преломляющей поверхности связываются формулой Ланге для просчета меридионального пучка.

$$\frac{q}{m'} \operatorname{tg} u' - \operatorname{tg} i' = \frac{q}{m} \operatorname{tg} u - \operatorname{tg} i, \quad (199)$$

причем переход от величины m'_{s-1} после $s - 1$ -й поверхности к величине m_s перед s -й поверхностью совершается по формуле

$$m_s = m'_{s-1} + K_s, \quad (200)$$

где K_s — расстояние между центрами предшествующей и последующей поверхностей.

Так как величины q'_{s-1} и q_s связаны аналогичной формулой

$$q_s = q'_{s-1} + K_s, \quad (201)$$

то, составив разность выражений (200) и (201), находим

$$m_s - q_s = m'_{s-1} - q'_{s-1}. \quad (202)$$

Согласно чертежу, выразим величины y_t и \bar{y}_t через соответственные разности $m - q$ как для старой, так и для новой оси:

$$\left. \begin{aligned} y_t &= (m'_{s-1} - q'_{s-1}) \sin u'_{s-1} \cos u'_{s-1} \\ \bar{y}_t &= (\bar{m}'_{s-1} - \bar{q}'_{s-1}) \sin u'_{s-1} \cos u'_{s-1} \end{aligned} \right\} \quad (203)$$

Составив разность величин \bar{y}_t и y_t , равную $-a$, получаем

$$\bar{y}_t - y_t = -a = (\bar{m}'_{s-1} - \bar{q}'_{s-1} - m'_{s-1} + q'_{s-1}) \sin u'_{s-1} \cos u'_{s-1} \quad (204)$$

или

$$\bar{m}'_{s-1} - \bar{q}'_{s-1} = \bar{m}_s - \bar{q}_s = m'_{s-1} - q'_{s-1} - \frac{a}{\sin u_s \cos u_s}. \quad (205)$$

Формула (205) позволяет осуществить как переход от старой оси к новой, так и (после преломления) от новой оси к старой.

Этот переход может быть несколько упрощен, если учесть, что величины q и \bar{q} связываются согласно рисунку соотношением

$$\bar{q}_s = q_s + \frac{a}{\operatorname{tg} u_s} = q'_{s-1} + K_s + \frac{a}{\operatorname{tg} u_s}. \quad (206)$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_s = m'_{s-1} + \bar{q}_s - q'_{s-1} - \frac{a}{\sin u_s \cos u_s} &= m'_{s-1} + K_s + \\ &+ \left(\frac{1}{\operatorname{tg} u_s} - \frac{1}{\sin u_s \cos u_s} \right) a \end{aligned} \quad (207)$$

или

$$\bar{m}_s = m'_{s-1} + K_s - a \operatorname{tg} u_s. \quad (208)$$

Совершенно очевидно, что формула (208) значительно проще формулы (205).

Обращаясь к просчету сагиттальных пучков через несферическую поверхность, следует обратить внимание на то обстоятельство, что центр сагиттальной кривизны у центрированной несферической поверхности остается лежащим на оси системы, поэтому при пользовании формулами Ланге для просчета сагиттальных пучков потребуется

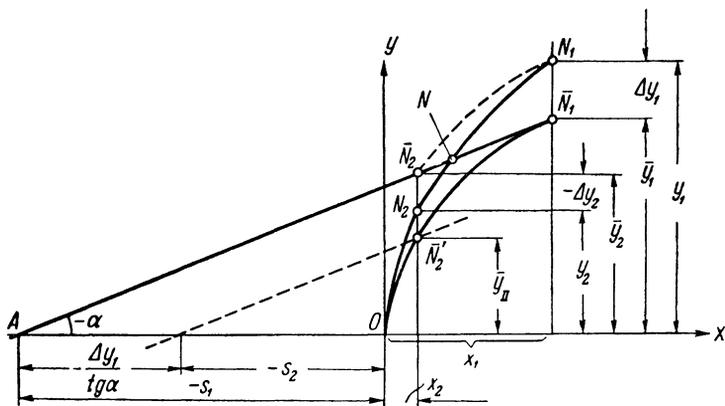


Рис. 17.

в названных формулах лишь заменить у несферической поверхности величину радиуса в вершине поверхности величиной сагиттального радиуса кривизны. В силу этого сами схемы для просчета астигматизма через несферическую поверхность высшего порядка изменяются против обычных схем для просчета луча через сферические поверхности очень незначительно. Приведем эти схемы (табл. 3).

В. А. Зверев [3] предложил для определения точки встречи луча с несферической поверхностью высшего порядка воспользоваться предварительным определением точки встречи луча с несферической поверхностью второго порядка.

Считая, что координаты точки встречи лучей x_1 и \bar{y}_1 с несферической поверхностью второго порядка, представленной кривой ON_1 (рис. 17) и уравнением

$$\bar{y}^2 = Ax + Bx^2, \quad (209)$$

известны, а также полагая профиль несферической поверхности, представленной кривой ON_1 , заданным уравнением

$$y^2 = Ax + Bx^2 + Cx^3 \dots, \quad (210)$$

Главный луч		Меридиональный пучок		Сагиттальный пучок
$\frac{\lg a_s}{\text{colg tg } u_s}$	$\frac{\lg a_s}{\text{colg tg } u_{s+1}}$	$\frac{\lg a_s}{\lg \text{tg } u_s}$	$\frac{\lg a_s -}{\lg \text{tg } u_{s+1}}$	$\lg \sin \Delta i_s$
$\frac{\lg b_s}{b_s}$	$\frac{\lg b_{s+1}}{b_{s+1}}$	$\frac{\lg c_s}{-c_s}$	$\frac{\lg c_{s+1}}{-c_{s+1}}$	$\text{colg } r_s$
$\frac{k_s}{\bar{k}_s}$	$\frac{k_{s+1}}{\bar{k}_{s+1}}$	$\frac{k_s}{\bar{k}_s}$	$\frac{k_{s+1}}{\bar{k}_{s+1}}$	$\text{colg } n_s$
$\frac{q'_{s-1}}{\bar{q}_s}$	$\frac{q'_s}{q_{s+1}}$	$\frac{m'_{s-1}}{\bar{m}_s}$	$\frac{m'_s}{m_{s+1}}$	$\text{colg } \sin i_s$
				$\text{colg } \sin u_s$
				$\frac{\text{colg } \sin u_{s+1}}{\lg \rho_s}$
				Далее, как обычно
	$\lg \bar{q}_s$		$\lg \bar{q}_s$	
	$\lg \sin u_s$		$\lg \text{tg } u_s$	
	$\frac{\text{colg } r_s}{\lg \sin i_s}$		$\frac{\text{colg } m_s}{\lg l_s}$	
	$\frac{\lg (n_s : n_{s+1})}{\lg \sin i'_s}$		$\lg \sin \Delta i_s$	
	$\lg r_t$		$\text{colg } \cos i_s$	
	$\frac{\text{colg } \sin u_{s+1}}{\lg \bar{q}'_s}$		$\frac{\text{colg } \cos i'_s}{\lg \Delta \text{tg } i_s}$	
	$-\bar{i}_s$		$\frac{l_s}{\Delta \text{tg } i_s}$	
	$\frac{i'_s}{\Delta i_s}$		$\frac{l'_s}{\bar{q}'_s}$	
	$\frac{u_s}{u_{s+1}}$		$\lg \text{tg } u_{s+1}$	
			$\frac{\text{colg } \bar{l}'_s}{\lg \bar{m}'_s}$	
				Далее, как обычно

подставим в уравнение (210) координату x_1 и получим некоторую величину y_1 , не равную \bar{y}_1 .

Разность этих величин — расхождение координат представим формулой

$$\Delta y_1 = y_1 - \bar{y}_1. \quad (211)$$

Пользуясь формулами (209) и (210) и полагая, что величина этой разности невелика, формулу (211) представим в виде:

$$\Delta y_1 = \frac{C x_1^3 + \dots}{2 \bar{y}_1}. \quad (212)$$

Переместим кривую второго порядка в направлении оси y на найденную нами величину расхождения Δy_1 (положение кривой показано на чертеже пунктиром). В этом случае точка \bar{N}_2 пересечения луча с пунктирной кривой окажется значительно ближе к истинной точке N пересечения луча с кривой высшего порядка. Найдем координаты точки \bar{N}_2 .

Пользуясь формулой (206), формулу (205) можно преобразовать.

Абсцисса x_2 точки пересечения луча со смещенной поверхностью второго порядка будет равна абсциссе x_{II} точки \bar{N}'_2 пересечения луча, смещенного параллельно самому себе (смещенный луч показан на чертеже пунктиром) на величину $-y_1$ с кривой второго порядка в ее начальном положении.

Ход такого смещенного луча будет определяться отрезком s_2 , равным

$$s_2 = s_1 - \frac{\Delta y_1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad (213)$$

что сразу же позволит определить в соответствии с формулами (152), (146) и (150) ординату y_{II} и вслед за этим обе координаты точки \bar{N}_2 пересечения луча со смещенной кривой второго порядка:

$$x_2 = x_{II}, \quad \bar{y}_2 = \bar{y}_{II} + \Delta y_1. \quad (214)$$

Подставляя значение x_2 в уравнение (210), находим ординату y_2 и величину расхождения ординат Δy_2 :

$$\Delta y_2 = y_2 - \bar{y}_2, \quad (215)$$

аналогично формуле (211).

Вслед за тем вновь сместим пунктирную кривую второго порядка на величину Δy_2 и найдем координаты точки \bar{N}_3 пересечения этой кривой с лучом и координаты точки N_3 на кривой высшего порядка и т. д., последовательно приближаясь к истинной точке пересечения луча и кривой высшего порядка.

Рассмотрим еще один способ просчета луча через несферические поверхности высшего порядка, дающий несколько менее быструю сходимость, нежели предыдущие способы, но зато более простой по применяемым формулам.

Этот метод построен на использовании для определения точки встречи луча с несферической поверхностью, касательной к поверхности сферы сагиттального радиуса кривизны с центром, лежащим на оси системы.

На рис. 18 показан ход луча, падающего на несферическую поверхность, заданную уравнением

$$y^2 = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots \quad (216)$$

Луч составляет с осью системы угол α , пересекая ее на расстоянии s от вершины несферической поверхности.

Предположим, что уже известно такое положение сферы некоторого радиуса r_0 , определяемое отрезком q_0 , когда точка N_0 пересечения луча с окружностью расположена вблизи точки пересечения N этого луча с несферической поверхностью.

Зная величины r_0 и q_0 и угол α , нетрудно определить угол i_0 луча с нормалью в точке N_0 к этой сфере по формуле

$$\sin i_0 = \frac{q_0}{r_0} \sin \alpha. \quad (217)$$

Опуская из точки N_0 перпендикуляр на ось системы, определим абсциссу x_0 точки \bar{N}_0 , расположенной на пересечении этого перпен-

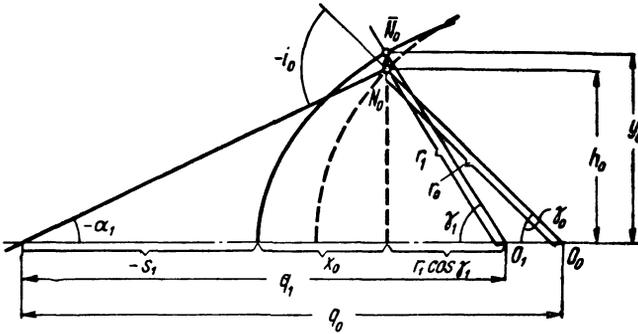


Рис. 18.

дикуляра с несферической поверхностью, для чего вычислим сначала угол γ_0 между нормалью к сфере и осью системы

$$\gamma_0 = \alpha - i_0, \quad (218)$$

а вслед за этим и величину абсциссы

$$x_0 = q_0 - r_0 \cos \gamma_0 + s. \quad (219)$$

Далее, пользуясь уравнением кривой (216), найдем ординату точки

$$y_0 = \sqrt{Ax_0 + Bx_0^2 + Cx_0^3 + \dots} \quad (220)$$

и тангенс угла γ_0 нормали к несферической поверхности в точке \bar{N}_0 :

$$\operatorname{tg} \bar{\gamma}_0 = \frac{2y_0}{A + 2Bx_0 + 3Cx_0 + \dots} \quad (221)$$

Имея в своем распоряжении величины y_0 и $\bar{\gamma}_0$, определим величину сагиттального радиуса кривизны в точке \bar{N}_0 :

$$r_1 = \frac{y_0}{\sin \bar{\gamma}_0}. \quad (222)$$

Легко определить и положение центра O_1 относительно точки пересечения падающего на поверхность луча с осью

$$q_1 = -s + x_0 + r_1 \cos \bar{\gamma}_0. \quad (223)$$

Полученная окружность, будучи касательной к несферической поверхности, пересечется с падающим лучом значительно ближе, нежели исходная сфера; принимая эту новую сферу за исходную и снова пользуясь формулами (217)—(223), с помощью ряда последовательных приближений определим координаты точки N с необходимой степенью точности. Совершенно очевидно, что далее уже нетрудно определить угол γ нормали с осью системы и, пользуясь формулами (157) и (158), найти выходной угол α' преломленного луча с осью системы и отрезок s' от вершины преломляющей поверхности до точки пересечения выходящего луча с осью:

$$\alpha' = i' + \gamma, \quad (157)$$

и

$$s' = \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha'} + x. \quad (158)$$

§ 10. Просчет луча через поверхности высшего порядка, заданные в полярной системе координат

Во всех рассмотренных в предыдущем параграфе приемах просчета лучей через несферические поверхности высшего порядка размещение начала координат системы, в которой задавалось уравнение профиля несферической поверхности, не было каким-либо образом связано со свойствами оптической системы, например ходом лучей через оптическую систему. Вместе с тем иногда представляется целесообразным выбрать начало координат совпадающим либо со зрачком оптической системы (для систем с большими полями зрения), либо с центром изображения или предмета (для систем с большими апертурными углами при небольших полях зрения).

В обоих случаях будем наблюдать сравнительно небольшие расхождения в углах между лучами и радиусами-векторами, проходящими через одни и те же точки образующей несферической поверхности. Это в значительной степени упрощает определение точки встречи луча с несферической поверхностью.

Действительно, обращаясь к рис. 19, на котором представлена картина преломления луча AN , пересекающего ось в некоторой

точке A на небольшом расстоянии от начала координат O с несферической поверхностью SN , профиль которой задается уравнением

$$R = R(\varphi), \quad (224)$$

можем обозначить угол между лучом и радиусом-вектором R через ω . Обозначая угол пересечения луча с осью через β и угол радиуса вектора через φ , можно написать

$$\varphi = -\beta - \omega. \quad (225)$$

Точку пересечения луча с преломляющей поверхностью обозначим через N .

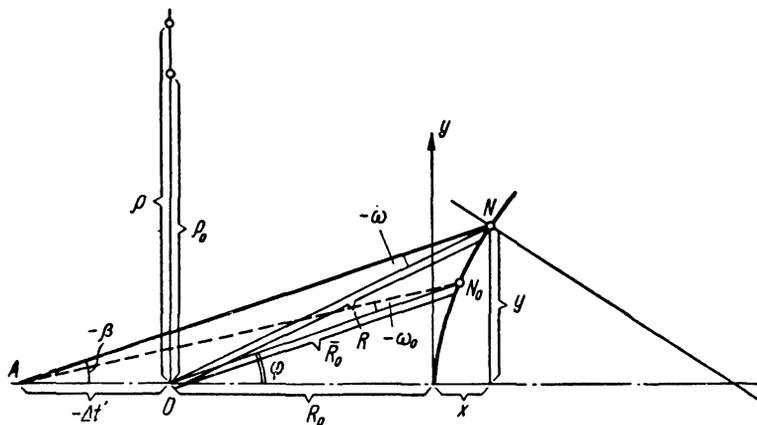


Рис. 19.

Проведем через начало координат прямую, параллельную падающему лучу до пересечения ее с поверхностью в некоторой точке N_0 .

Если расстояние $AO = -\Delta t$ мало, то и расстояние между точками N и N_0 будет также мало.

С помощью формулы (224), характеризующей профиль поверхности, можно определить расстояние ON_0 , равное \bar{R}_0 .

Соединив между собой точки A и N , образуем треугольник AN_0O , из которого легко определить угол ω_0 .

Пользуясь рис. 19 и помня, что отрезок Δt мал, определим угол ω_0 по следующей формуле:

$$\sin \omega_0 = -\frac{\Delta t}{\bar{R}_0} \sin \beta. \quad (226)$$

Заметим, что величина этого угла будет отличаться от величины истинного угла ω , образованного лучом и радиусом-вектором R в точке N , на величину высшего порядка малости.

Действительно, если бы углы ω и ω_0 были строго равны друг другу, то точки A , O , N_0 и N должны бы лежать на одной и той же окружности. Однако в общем случае точки N_0 и N лежат на разных окружностях, пересекающихся друг с другом в точках A и O .

Полагая, что центры обеих окружностей (ввиду малости отрезка AO) можно принять лежащими на оси ординат, углы ω и ω_0 можно определить как отношения отрезка AO к диаметру той и другой окружности:

$$\omega = \frac{\Delta t}{2q}, \quad \omega_0 = \frac{\Delta t}{2q_0}. \quad (227)$$

Имея в виду, что радиусы этих окружностей могут быть выражены через радиусы-векторы по формуле

$$q^2 = (R_0 + x)^2 + (q - y)^2, \quad (228)$$

или

$$2qy = (R_0 + x)^2 + y^2 = R^2, \quad (229)$$

и помня, что

$$\frac{y}{R} = \sin \varphi, \quad (230)$$

находим разность углов ω и ω_0 :

$$\omega - \omega_0 = \Delta t \left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2q_0} \right) = \Delta t \left(\frac{2y}{R^2} - \frac{2y}{\bar{R}_0^2} \right), \quad (231)$$

или

$$\omega - \omega_0 = 2\Delta t \left(\frac{\sin \varphi}{R} - \frac{\sin \varphi_0}{\bar{R}_0} \right). \quad (232)$$

Но величины φ_0 и \bar{R}_0 можно выразить через их разности с величинами φ и R

$$\omega - \omega_0 = 2\Delta t \frac{\sin \varphi}{R} \left(1 - \frac{\cos \Delta \varphi - \frac{\sin \Delta \varphi}{\operatorname{tg} \varphi}}{1 - \frac{\Delta R}{R}} \right) \quad (233)$$

или, переходя к приближенным формулам,

$$\begin{aligned} \omega - \omega_0 &= 2\Delta t \frac{\sin \varphi}{R} \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \left(1 + \frac{\Delta R}{R} \right) \right] = \\ &= 2\Delta t \frac{\sin \varphi}{R} \left(\frac{\Delta \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} - \frac{\Delta R}{R} \right), \end{aligned} \quad (234)$$

что и доказывает высказанное утверждение о порядке малости величины $\omega - \omega_0$.

Величина истинного угла φ определяется формулой

$$\varphi = -\beta - \omega. \quad (235)$$

Обозначив угол ω через ω_0 , как это уже было установлено, сделаем ошибку высшего порядка малости. Пользуясь формулой (224) и зная угол

$$\varphi_1 = \beta - \omega_0, \quad (236)$$

можно определить на кривой некоторую точку N_1 , которая будет отстоять от истинной точки встречи луча с несферической поверхностью на величину высшего порядка малости.

Радиус-вектор \vec{R}_1 , характеризующий положение точки N_1 на кривой, позволяет, пользуясь формулой (229), определить угол ω_1 , еще более близкий к углу ω ; повторяя последовательно этот процесс, очевидно, сможем определить и положение точки встречи луча с преломляющей поверхностью с требуемой степенью точности.

Далее, зная величины φ и R , и пользуясь формулами (14) и (15), найдем прямоугольные координаты точки N . Определив по формуле (20) тангенс γ , пользуясь формулами (157) и (158) (см. § 8), найдем угол β' преломленного луча с осью системы и отрезок s' от вершины преломляющей поверхности.

Для определения астигматизма можно пользоваться формулами (22) и (26) (см. § 2).

ТЕОРИЯ АБЕРРАЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ПРИЛОЖЕНИИ К НЕСФЕРИЧЕСКИМ ПОВЕРХНОСТЯМ

§ 11. Деформация сферической поверхности

Используя теорию аббераций третьего порядка для расчета оптических систем, состоящих из сферических поверхностей, позволяющую получать универсальные приближенные формулы, представилось вполне естественным расширить эту теорию и на случаи расчета оптических систем, построенных из несферических поверхностей. Эта задача была успешно разрешена Шварцшильдом.

Получение коэффициентов третьего порядка с учетом деформации сферических поверхностей выполняется различными способами (например, посредством теории эйконала); однако вывод зейделевских формул в общем виде представляет вполне самостоятельную задачу и это вряд ли нужно описывать в настоящей монографии. Ограничимся использованием уже готовых формул для коэффициентов аббераций третьего порядка и выполним с ними лишь некоторые преобразования.

Имея в виду, что анализ аббераций третьего порядка производится только в данной главе, с целью облегчения перехода от формул, заимствуемых из книги проф. Г. Г. Слюсарева «Методы расчета оптических систем»¹, сохраним обозначения, которые были приняты в упомянутом исследовании. Приведем эти обозначения (см. рис. 20):

x, y, z — координаты точки на преломляющей сфере или несферической поверхности;

b — коэффициент деформации сферической поверхности;

h — высота первого (апертурного) параксиального луча;

y — высота второго (полевого) параксиального луча;

s, s' — отрезки от вершины поверхности до точек пересечения с осью падающего и преломленного апертурного луча;

x, x' — отрезки от вершины поверхности до точек пересечения с осью падающего и преломленного полевого — главного луча;

α, α' — углы с осью системы первого параксиального луча;

¹ С л ю с а р е в Г. Г. Методы расчета оптических систем. М.—Л., ОНТИ, 1937.

β, β' — углы с осью системы второго параксиального луча;
 Q_s, Q_x — инвариант Аббе для первого и второго параксиальных лучей;

Γ — инвариант Лагранжа — Гельмгольца;

σ — выражение, определяемое формулой

$$\sigma = \sum_2^p \frac{d_{k-1}}{h_{k-1} h_k n_k}. \quad (237)$$

Шварцшильдом предложен следующий прием введения деформации сферической поверхности. Уравнение сферы радиуса r , отнесенное к системе координат, начало которой отстоит от вершины сферы на расстоянии s , имеет следующий вид:

$$x = (r - s) - \sqrt{r^2 - (y^2 + z^2)}. \quad (238)$$

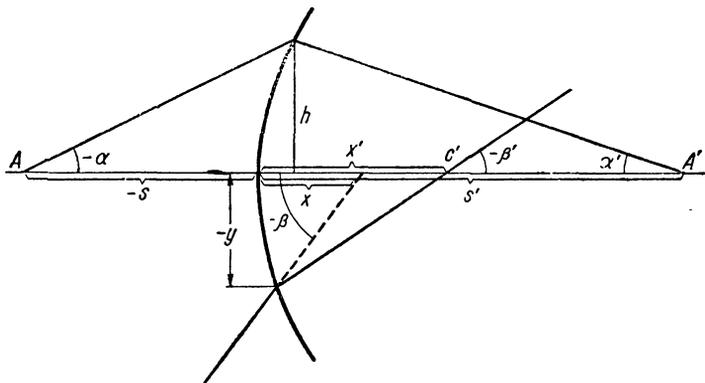


Рис. 20.

Полагая, что отношение $\frac{y^2 + z^2}{r^2}$ мало, квадратный корень в правой части формулы (238) можем развернуть в ряд по степеням $\frac{y^2 + z^2}{r^2}$.

$$x = r - s - r \sqrt{1 - \frac{y^2 + z^2}{r^2}} = -s + \frac{1}{2} \frac{y^2 + z^2}{r} + \frac{1}{8} \frac{(y^2 + z^2)^2}{r^3} + \dots \quad (239)$$

Уравнения несферических поверхностей будут отличаться от уравнения окружности, начиная с члена разложения, содержащего квадрат отношений $\frac{y^2 + z^2}{r^2}$. Поэтому, вводя в третий член формулы (239) некоторый дополнительный множитель $1 + b$

$$x = -s + \frac{1}{2} \frac{y^2 + z^2}{r} + \frac{1}{8} \frac{(y^2 + z^2)^2}{r^3} (1 + b), \quad (240)$$

осуществим переход от сферы к несферической поверхности.

В частности, при значении коэффициента $b = -1$ уравнение несферической поверхности переходит в уравнение параболоида вращения; при $b = 0$ получаем уравнение сферы; при $-1 < b < 0$ уравнение несферической поверхности представит собой эллипсоиды вращения с большей осью, совпадающей с осью оптической системы.

Формула (240) на первый взгляд является достаточно универсальной, однако на самом деле она непригодна для случая деформирования плоской поверхности. Действительно, имея дело с плоской преломляющей поверхностью, необходимо обратить внимание на то обстоятельство, что радиус кривизны для плоскости обращается в бесконечность; в этом случае, придавая коэффициенту b любые конечные значения, всегда будем получать абсциссу x равной нулю, что равнозначно отсутствию деформации.

Однако, обращаясь к planoидной поверхности, представляющей в простейшем случае параболоид вращения четвертой степени, можно определить абсциссу x следующим уравнением:

$$x = -s + B(y^2 + z^2)^2. \quad (241)$$

Формула (241) могла бы быть получена из формулы (240) при условии введения в нее дополнительного множителя $1 + 8Br^3$:

$$x = -s + \frac{1}{2} \frac{y^2 + z^2}{r} + \frac{1}{8} \frac{(y^2 + z^2)^2}{r^3} (1 + 8Br^3) \quad (242)$$

или

$$x = + \frac{1}{2} \frac{y^2 + z^2}{r} + \frac{(y^2 + z^2)^2}{8} \left(\frac{1}{r^3} + 8B \right), \quad (243)$$

так как в таком виде при обращении r в бесконечность формула (243) переходит в формулу (241).

§ 12. Формулы коэффициентов аберраций третьего порядка для несферических поверхностей

В качестве исходных выражений для коэффициентов аберраций третьего порядка для несферических поверхностей воспользуемся формулами, взятыми из книги проф. Г. Г. Слюсарева «Методы расчета оптических систем»:

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{n'_p \delta g'_p \alpha'_p}{h_1} &= \frac{m_1 (m_1^2 + M_1^2)}{(x_1 - s_1)^3} s_1^3 S_I^* - \frac{3m_1^2 + M_1^2}{(x_1 - s_1)^3} l_1 s_1^2 x_1 S_{II}^* + \\ &+ \frac{m_1 l_1^2}{(x_1 - s_1)^3} s_1 x_1^2 (3S_{III}^* + S_{IV}^*) - \frac{l_1^3}{(x_1 - s_1)^3} x_1^3 S_V^* \\ 2 \frac{n'_p \delta G'_p \alpha'_p}{h_1} &= \frac{M_1 (m_1^2 + M_1^2)}{(x_1 - s_1)^3} s_1^3 S_I^* - \frac{2m_1 M_1}{(x_1 - s_1)^3} l_1 s_1^2 x_1 S_{II}^* + \\ &+ \frac{M_1 l_1^2}{(x_1 - s_1)^3} s_1 x_1^2 (S_{III}^* + S_{IV}^*). \end{aligned} \right\} \cdot (244)$$

где $\delta g'_p$ — меридиональная составляющая поперечной аберрации;
 $\delta G'_p$ — сагиттальная составляющая поперечной аберрации;
 m_1, M_1 — координаты луча в плоскости входного зрачка (начало координат совпадает с центром зрачка);
 l_1 — величина предмета;
значения сумм Зейделя S_I^* , S_{II}^* , S_{III}^* , S_{IV}^* и S_V^* выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} S_I^* &= \sum \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^4 \left[Q_{sk}^2 \Delta_k \frac{1}{ns} + k_k \right] \\ S_{II}^* &= \sum \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^3 \frac{y_k}{y_1} \left[Q_{xk} Q_{sk} \Delta_k \frac{1}{ns} + k_k \right] \\ S_{III}^* &= \sum \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^2 \left[Q_{xk}^2 \Delta_k \frac{1}{ns} + k_k \right] \\ S_{IV}^* &= - \sum \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^2 (Q_{xk} - Q_{sk})^2 \frac{1}{r_k} \Delta_k \frac{1}{n} \\ S_V^* &= \sum \left(\frac{h_k}{h_1} \right) \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^3 \left[Q_{xk}^2 \Delta_k \frac{1}{ns} + Q_{xk} (Q_{xk} - Q_{sk}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \Delta_k \frac{1}{nx} + k_k \right] \\ k_k &= - \frac{b_k}{r_k^3} (n'_k - n_k) \end{aligned} \right\} \cdot (245)$$

Обратим внимание, что формулы (244) имеют нулевую размерность; в силу этого выражения для самих сумм, представленных формулами (245), являются величинами минус третьей размерности.

Кроме того, следует отметить, что коэффициент деформации k входит во все суммы, кроме четвертой, откуда сделаем вывод: использование несферических поверхностей не влияет на исправление кривизны поверхности изображения.

Рассматривая выражения для всех зейделевских коэффициентов, видим, что в них входят величины h_1 и y_1 , зависящие от положения предмета и зрачка входа; поэтому при изменении положения предмета и зрачка входа будет происходить изменение величины зейделевских коэффициентов.

Выражения, в которых представлены зейделевские коэффициенты в формулах (245), не очень удобны для их использования. Поэтому представляется целесообразным произвести в них замену радиусов и отрезков s другими переменными величинами — углами α и β двух параксиальных лучей и их высотами h и y на поверхностях оптической системы.

Эти величины связываются друг с другом формулами

$$\frac{h}{s} = \alpha, \quad \frac{h}{s'} = \alpha', \quad \frac{y}{x} = \beta \quad \text{и} \quad \frac{y'}{x'} = \beta'. \quad (246)$$

Для радиуса кривизны преломляющей поверхности имеем :

$$\frac{1}{r} = \frac{n' \alpha' - n \alpha}{h (n' - n)} = \frac{\Delta \alpha n}{h \Delta n}. \quad (247)$$

В соответствии с этим инварианты Аббе для первого и второго параксиальных лучей Q_s и Q_x представим в виде:

$$-Q_s = n' \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{r} \right) = n \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \right) = \frac{n}{h} \left(\alpha - \frac{n' \alpha' - n \alpha}{n' - n} \right) \quad (248)$$

или

$$\left. \begin{aligned} -Q_s &= -\frac{nn'}{h} \frac{\alpha' - \alpha}{n' - n} = \frac{1}{h} \frac{\Delta \alpha}{\Delta v} \\ -Q_x &= \frac{1}{y} \frac{\Delta \beta}{\Delta v} \end{aligned} \right\}, \quad (249)$$

где v — обратная величина показателя преломления.

Таким образом, произведения вида $Q_s^2 \Delta \frac{1}{ns}$ преобразуются:

$$Q_s^2 \Delta \frac{1}{ns} = \frac{1}{h^2} \frac{\Delta \alpha^2}{\Delta v^2} \frac{\Delta \alpha v}{h} = \frac{1}{h^3} P, \quad (250)$$

где

$$P = \left(\frac{\Delta \alpha}{\Delta v} \right)^2 \Delta \alpha v. \quad (251)$$

Аналогично преобразуются произведения вида $Q_s \Delta \frac{1}{ns}$:

$$-Q_s \Delta \frac{1}{ns} = \frac{1}{h^2} \frac{\Delta \alpha}{\Delta v} \Delta \alpha v = \frac{W}{h^2}, \quad (252)$$

где

$$W = \frac{\Delta \alpha}{\Delta v} \Delta \alpha v. \quad (253)$$

Формулы (249) — (251) позволяют преобразовать выражения для трех первых сумм в формулах (245):

$$\left. \begin{aligned} S_I^* &= \frac{1}{h_1^4} \sum [h_k P_k + h_k^4 k_k] = \frac{1}{h_1^4} \left\{ S_I + \sum h_k^4 k_k \right\} \\ S_{II}^* &= \frac{1}{h_1^3 y_1} \sum \left[h_k P_k \frac{\Delta \beta}{\Delta \alpha} + h_k^3 y_k k_k \right] = \frac{1}{h_1^3 y_1} \left\{ S_{II} + \sum h_k^3 y_k k_k \right\} \\ S_{III}^* &= \frac{1}{h_1^2 y_1^2} \sum \left[h_k P_k \frac{\Delta \beta^2}{\Delta \alpha^2} + h_k^2 y_k^2 k_k \right] = \frac{1}{h_1^2 y_1^2} \left\{ S_{III} + \sum h_k^2 y_k^2 k_k \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (254)$$

Составим разность инвариантов Q_x и Q_s :

$$Q_x - Q_s = n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x} \right) - n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = n \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{x} \right) \quad (255)$$

или

$$Q_x - Q_s = n \frac{x-s}{xs} = h(x-s) \frac{\beta\alpha}{yh}, \quad (256)$$

но произведение

$$(x-s)\beta = l, \quad (257)$$

и тогда в числителе формулы (256) получаем инвариант I Лагранжа—Гельмгольца

$$Q_x - Q_s = \frac{nl\alpha}{yh} = \frac{J}{yh} \quad (258)$$

или

$$J = yh(Q_x - Q_s), \quad (259)$$

ибо в выражение S_{IV}^* правая часть формулы входит в квадрате, а так как инвариант J является полным инвариантом, то его можно вынести за знак суммы, и, таким образом, для S_{IV}^* получаем следующее замечательное выражение:

$$S_{IV}^* = - \frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \sum \frac{\Delta v}{r}, \quad (260)$$

Перейдем к преобразованию S_V^* . Для преобразования этой суммы воспользуемся следующим искусственным приемом. Сложим выражения для третьей и четвертой сумм. Согласно формулам (254) и (260)

$$S_{III}^* + S_{IV}^* = \sum \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^2 \left[Q_{xk}^2 \Delta \frac{1}{ns} - (Q_{xk} - Q_{sk})^2 \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{r_k} \Delta_k \frac{1}{n} + h_k \right]. \quad (261)$$

Перейдем к преобразованию второго члена в квадратных скобках в формуле (261). Перемножая разности $\Delta \frac{1}{n}$ на инварианты Q_x и Q_s , напомним

$$(Q_x - Q_s) \frac{1}{r} \Delta \frac{1}{n} = \left[Q_x \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right) - Q_s \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right) \right] \frac{1}{r}. \quad (262)$$

Раскрывая скобки и производя сокращения, находим

$$(Q_x - Q_s) \frac{1}{r} \Delta \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} - \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} \right) \frac{1}{r}. \quad (263)$$

Прибавляя и вычитая в скобках в правой части члены $\frac{1}{s'x'}$ и $\frac{1}{sx}$, получаем

$$(Q_x - Q_s) \frac{1}{r} \Delta \frac{1}{n} = \frac{1}{x'} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right) + \frac{1}{s'} \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{x} \times \\ \times \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) - \frac{1}{s} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r} \right) \quad (264)$$

и окончательно

$$(Q_x - Q_s) \frac{1}{r} \Delta \frac{1}{n} = Q_x \Delta \frac{1}{ns} - Q_s \Delta \frac{1}{nx}. \quad (265)$$

На основании этой формулы можно преобразовать выражение (261) для суммы $S_{III}^* + S_{IV}^*$:

$$\begin{aligned} S_{III}^* + S_{IV}^* = & \sum \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^2 \left[Q_{xk}^2 \Delta_k \frac{1}{ns} + \right. \\ & \left. + (Q_{xk} - Q_{sk}) \left(Q_{sk} \Delta_k \frac{1}{nx} - Q_{xk} \Delta_k \frac{1}{ns} \right) + k_k \right] \end{aligned} \quad (266)$$

или, производя сокращения после перемножений в квадратных скобках,

$$\begin{aligned} S_{III}^* + S_{IV}^* = & \sum \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^2 Q_{sk} \times \\ & \times \left[Q_{xk} \Delta_k \frac{1}{ns} + (Q_{xk} - Q_{sk}) \Delta_k \frac{1}{nx} + k_k \right]. \end{aligned} \quad (267)$$

Перенос в левую часть выражения сумму с коэффициентами k_k , правую часть формулы (267) можно приравнять правым частям формул (254) и (260):

$$\begin{aligned} S_{III}^* + S_{IV}^* - \sum \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^2 k_k = & \sum \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^2 \times \\ & \times Q_{sk} \left[Q_{xk} \Delta_k \frac{1}{ns} + (Q_{xk} - Q_{sk}) \Delta_k \frac{1}{nx} \right] = \\ = & \frac{1}{h_1^2 y_1^2} \left[\sum h_k P_k \left(\frac{\Delta \beta}{\Delta \alpha} \right)^2 - J^2 \sum \frac{\Delta v}{r} \right]. \end{aligned} \quad (268)$$

Составим отношение формул (249)

$$\frac{v Q_x}{h Q_s} = \frac{\Delta \beta}{\Delta \alpha}. \quad (269)$$

Умножая все члены формулы (268) на это отношение, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2 y_1^2} \sum h_k y_k^3 Q_{xk} \left[Q_{xk} \Delta_k \frac{1}{ns} + (Q_{xk} - Q_{sk}) \Delta_k \frac{1}{nx} \right] = \\ = \frac{1}{h_1^2 y_1^2} \left\{ \left[\sum h_k P_k \left(\frac{\Delta \beta}{\Delta \alpha} \right)^2 - J^2 \sum \frac{\Delta v}{r} \right] \frac{\Delta \beta}{\Delta \alpha} \right\}, \end{aligned} \quad (270)$$

через которое можно выразить S_V^* . Действительно, перенося в выражении (245) сумму членов, содержащих коэффициент деформации k_k в левую часть, получаем

$$\begin{aligned} S_V^* - \frac{1}{h_1 y_1^3} \sum h_k y_k^3 k_k = \\ = \frac{1}{h_1 y_1^3} \sum h_k y_k^3 Q_{xk} \left[Q_{xk} \Delta_k \frac{1}{ns} + Q_{xk} - Q_{sk} \Delta_k \frac{1}{nx} \right], \end{aligned} \quad (271)$$

где сумма в правой части равенства равна сумме в левой части формулы (270). В силу этого выражение для S_V^* перепишем в следующем виде:

$$S_V^* - \frac{1}{h_1 y_1^3} \sum h_k y_k^3 k_k = \\ = \frac{1}{h_1 y_1^3} \left\{ \left[\sum h_k P_k \left(\frac{\Delta \beta}{\Delta \alpha} \right)^2 - J_2 \sum \frac{\Delta v}{r} \right] \frac{\Delta \beta}{\Delta \alpha} \right\} \quad (272)$$

или окончательно

$$S_V^* = \frac{1}{h_1 y_1^3} (S_V + \sum h_k y_k^3 k_k). \quad (273)$$

Преобразуем коэффициент деформации k_k . Согласно формуле (245) для этого коэффициента имеем следующее выражение:

$$k_k = \frac{b_k}{r_k^3} (n' - n).$$

Развертывая в нем выражение для радиуса r , получаем

$$k_k = \frac{b_k (\alpha' n' - \alpha n)^3}{h_k^3 (n' - n)^2}. \quad (274)$$

Используя формулу (274), перепишем все формулы (245) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} S_I^* &= \frac{1}{h_1^4} \left[\sum h_k P_k + \sum h_k b_k \frac{(\Delta \alpha n)^3}{(\Delta n)^2} \right] \\ S_{II}^* &= \frac{1}{h_1^3 y_1} \left[\sum h_k P_k \frac{\Delta \beta}{\Delta \alpha} + \sum y_k b_k \frac{(\Delta \alpha n)^3}{(\Delta n)^2} \right] \\ S_{III}^* &= \frac{1}{h_1^2 y_1^2} \left[\sum h_k P_k \frac{\Delta \beta^2}{\Delta \alpha^2} + \sum \frac{y_k^2}{h_k} b_k \frac{(\Delta \alpha n)^3}{(\Delta n)^2} \right] \\ S_{IV}^* &= - \frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \sum \frac{\Delta v}{r} = \frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \sum \frac{\Delta \alpha n}{h_k} \\ S_V^* &= \frac{1}{h_1 y_1^3} \left\{ \left[\sum h_k P_k \frac{\Delta \beta^2}{\Delta \alpha^2} + J^2 \sum \frac{\Delta \alpha n}{n_k} \right] \frac{\Delta \beta}{\Delta \alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \sum \frac{y_k^3}{h_k^2} b_k \frac{(\Delta \alpha n)^3}{(\Delta n)^2} \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (275)$$

Формулы (275) носят название зейделевских формул в обозначениях Ланге.

Однако и эта форма зейделевских формул не очень удобна, так как в нее входят углы β и высоты y , принадлежащие второму параксиальному лучу.

Вместе с тем величины углов β могут быть исключены из зейделевских формул, и тогда приходим ко второму виду формул, предложенному Ланге.

Для исключения углов β возвратимся к исходным формулам (245). Пользуясь формулой (258), можем выразить инвариант Q_x через инвариант Q_s :

$$Q_{xk} = \frac{J}{y_k h_k} + Q_{sk}. \quad (276)$$

Обращаясь к первой сумме S_I^* , видим, что величины φ и β в нее не входят и она не нуждается в преобразованиях.

Обратимся к выражению для второй суммы. Подставляя в это выражение значение Q_{xk} из формулы (276), получаем

$$S_{II}^* \sum \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^3 \frac{y_k}{y_1} \left[Q_{sk}^2 \Delta_h \frac{1}{ns} + \frac{J}{y_k h_k} Q_{sk} \Delta_h \frac{1}{ns} + k_k \right]. \quad (277)$$

Пользуясь формулами (250) и (252), можно заменить величины Q_{sk} величинами P и W :

$$S_{II}^* = \frac{1}{h_1^3 y_1} \left(\sum y_k P_k - J \sum W + \sum h_k^3 y_k k_k \right). \quad (278)$$

Займемся выражением для третьей суммы. Действуя аналогично предыдущему, заменим и в этой сумме величины Q_{xk} величинами Q_{sk} . Тогда третья сумма преобразуется:

$$S_{III}^* = \sum \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^2 \times \left[Q_{sk}^2 \Delta \frac{1}{ns} + \frac{2J}{y_k h_k} Q_{sk} \Delta \frac{1}{ns} + \frac{J^2}{y_k^2 h_k^2} \Delta \frac{1}{ns} + k_k \right]. \quad (279)$$

Заменяя далее величины Q_{sk} величинами P и W , приходим к следующему виду третьей суммы:

$$S_{III}^* = \frac{1}{h_1^2 y_1^2} \left\{ \sum \frac{y_k^2}{h_k} P_k - 2J \sum \frac{y_k}{h_k} W + J^2 \sum \frac{1}{h_k} \Delta \alpha \nu + \sum y_k k_k^2 h_k^2 k_k \right\}. \quad (280)$$

В четвертую, пецвалеву сумму, величины y и β , так же как и в первую сумму, не входят; поэтому четвертая сумма остается без изменений.

Займемся преобразованиями пятой суммы. Заменяя аналогично преобразованиям второй и третьей сумм величины Q_{xk} величинами Q_{sk} , получаем

$$S_V^* = \frac{1}{h_1 y_1^3} \sum \left[h_k y_k^3 \left(Q_{sk} + \frac{J}{h_k y_k} \right)^2 \Delta \frac{1}{ns} + y_k^2 \left(Q_{sk} + \frac{J}{h_k y_k} \right) \times \right. \\ \left. \times J \cdot \Delta \frac{1}{nx} + h_k y_k^3 k_k \right]. \quad (281)$$

В формулу (281) входит разность вида $\Delta \frac{1}{nx}$. Выразим эту разность через $\Delta \frac{1}{ns}$ для первого параксиального луча, для чего к выражению разности $\Delta \frac{1}{nx}$ прибавим и вычтем разность $\Delta \frac{1}{ns}$:

$$\Delta \frac{1}{nx} = \frac{1}{n'x'} - \frac{1}{nx} = \frac{1}{n'} \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{s'} \right) - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{s} \right) + \Delta \frac{1}{ns}. \quad (282)$$

Но величина разностей в скобках может быть выражена, согласно формулам (256) и (258), через

$$\frac{1}{n'} \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{s'} \right) = \frac{1}{n'} \frac{s' - x'}{x's'} = \frac{(s' - x') \beta' \alpha'}{n' y_h} = - \frac{J}{y_h} \cdot \frac{1}{n'^2}, \quad (283)$$

что приводит к

$$\Delta \frac{1}{nx} = \Delta \frac{1}{ns} - \frac{J}{y_h k_h} \Delta \frac{1}{n^2}. \quad (284)$$

Пользуясь этим выражением, преобразуем формулу (281):

$$S_V^* = \frac{1}{h_1 y_1^3} \sum \left[h_k y_k^3 Q_{sk}^2 \Delta \frac{1}{ns} + 3J y_k^2 Q_{sk} \Delta \frac{1}{ns} - J^2 \frac{y_k}{h_k} Q_{sk} \Delta \frac{1}{n^2} + \right. \\ \left. + 2 \frac{y_k}{h_k} J^2 \Delta \frac{1}{ns} - \frac{J^3}{h_k^2} \Delta \frac{1}{n^2} + h_k y_k^3 k_k \right]. \quad (285)$$

Заменяя, как и ранее, величины Q_{sk} величинами P и W , приходим к следующему выражению для пятой суммы с исключенными углами β :

$$S_V^* = \frac{1}{h_1 y_1^3} \left\{ \sum h_k y_k^3 Q_{sk}^2 \Delta \frac{1}{ns} + 3J \sum y_k^2 Q_{sk} \Delta \frac{1}{ns} + \right. \\ \left. + J^2 \sum \frac{y_k}{h_k} \left(2\Delta \frac{1}{ns} - Q_{sk} \Delta \frac{1}{n^2} \right) - J^3 \sum \frac{1}{h_k^2} \Delta \frac{1}{n^2} \right\} + \\ + \frac{1}{h_1 y_1^3} \sum h_k y_k^3 k_k. \quad (286)$$

Преобразуя величину, стоящую в скобках в третьем члене формулы (286)

$$2\Delta \frac{1}{ns} - Q_s \Delta \frac{1}{n^2} = 2\Delta \frac{1}{ns} - \Delta \frac{1}{nr} + \Delta \frac{1}{ns} = 3\Delta \frac{1}{ns} - \frac{\Delta v}{r}, \quad (287)$$

получаем окончательное выражение для пятой суммы

$$S_V^* = \frac{1}{h_1 y_1^3} \left\{ \sum \frac{y_k^3}{h_k^2} P - 3J \sum \frac{y_k^2}{h_k^2} W + J^2 \sum \frac{y_k}{h_k^2} \left(3\Delta \frac{\alpha}{n} + \pi \right) - \right. \\ \left. - J^3 \sum \frac{1}{h_k^2} \Delta \frac{1}{n^2} + \sum h_k y_k^3 k_k \right\}, \quad (288)$$

где величина π определяется формулой

$$\pi = \frac{\Delta \alpha n}{nn'} . \quad (289)$$

Однако и эти формулы еще содержат величины y_h , принадлежащие к второму параксиальному лучу.

Для их исключения можем воспользоваться известной формулой, связывающей отношения высот первого и второго параксиальных лучей,

$$\frac{y_h}{h_h} = \frac{y_1}{h_1} + J \sigma_h, \quad (290)$$

где

$$\sigma_h = \sum_2^h \frac{d_{h-1}}{n_k h_{k-1} h_k} . \quad (291)$$

Переходя к преобразованиям зейделевских сумм для окончательного исключения из них величин, относящихся к второму параксиальному лучу, видим, что и первая, и четвертая суммы не содержат в себе величин y_h и поэтому сохраняют свой вид и в этом случае. Поэтому можем сразу же перейти к преобразованию второй суммы.

Представляя формулу (278) для второй суммы в виде:

$$S_{II}^* = \frac{1}{h_1^3 y_1} \left[\sum y_h (P + h_k^3 k_k) - J \sum W \right] \quad (292)$$

и выполнив в этой формуле подстановку согласно формуле (290), получаем

$$S_{II}^* = \frac{1}{h_1^4} \sum (h_k P + h_k^4 k_k) + \frac{1}{h_1^3 y_1} J \left[\sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma - W \right] . \quad (293)$$

Но первый член в формуле (293) есть не что иное, как первая сумма S_I^* . Таким образом,

$$S_{II}^* = S_I^* + \frac{J}{h_1^3 y_1} \left[\sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma - \sum W \right] . \quad (294)$$

Приступим к преобразованиям третьей суммы. Обращаясь к формуле (280) и осуществляя подстановку согласно формуле (290), получим

$$S_{III}^* = \frac{1}{h_{II}^2 y_1^2} \left\{ \sum \left(\frac{y_1}{h_1} + J \sigma \right)^2 h_k P - 2J \sum \left(\frac{y_1}{h_1} + J \sigma \right) W + \right. \\ \left. + J^2 \sum \frac{1}{h_k} \Delta \frac{\alpha}{n} + \sum \left(\frac{y_1}{h_1} + J \sigma \right)^2 h_k^4 k_k \right\} \quad (295)$$

или

$$S_{III}^* = \frac{1}{h_1^2 y_1^2} \left\{ \sum \left[\frac{y_1^2}{h_1^2} + 2 \frac{y_1}{h_1} J \sigma + J^2 \sigma^2 \right] \times \right. \\ \left. \times (h_k P + h_k^4 k_k) - 2J \sum \left(\frac{y_1}{h_1} + J \sigma \right) W + J^2 \sum \frac{1}{h_k} \Delta \frac{\alpha}{n} \right\}. \quad (296)$$

После перемножений получаем

$$S_{III}^* = \frac{1}{h_1^4} \sum (h_k P + h_k^4 k_k) + \frac{2J}{h_1^4 y_1} \sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma + \\ + \frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma^2 - \frac{2J}{h_1^3 y_1} \sum W - \frac{2J^2}{h_1^2 y_1^2} \sum W \sigma + \\ + \frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \sum \frac{1}{h_k} \Delta \frac{\alpha}{n}. \quad (297)$$

Это выражение представим в несколько ином виде:

$$S_{III}^* = \frac{1}{h_1^4} \sum (h_k P + h_k^4 k_k) + \frac{2J}{h_1^3 y_1} \left[\sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma - W \right] + \\ + \frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \left[\sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma^2 - 2 \sum W \sigma + \sum \frac{1}{h_k} \Delta \frac{\alpha}{n} \right]. \quad (298)$$

Но выражение в первых квадратных скобках есть не что иное, как разность между значениями второй и первой суммы; таким образом,

$$S_{III}^* = S_I^* + 2(S_{II}^* - S_I^*) + \frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \left[\sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma^2 - 2 \sum W \sigma + \right. \\ \left. + \sum \frac{1}{h_k} \Delta \frac{\alpha}{n} \right] \quad (299)$$

или окончательно

$$S_{III}^* = 2S_{II}^* - S_I^* + \frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \left[\sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma^2 - 2 \sum W \sigma + \right. \\ \left. + \sum \frac{1}{h_k} \Delta \frac{\alpha}{n} \right]. \quad (300)$$

Обработаем выражения для пятой суммы. Пользуясь исходной формулой (288) и подставляя в нее отношение $\frac{y_k}{h_k}$ из формулы (290), напишем

$$S_V^* = \frac{1}{h_1 y_1^3} \sum \left(\frac{y_1}{h_1} + J \sigma \right)^3 (h_k P + h_k^4 k_k) - \frac{3J}{h_1 y_1^3} \sum \left(\frac{y_1}{h_1} + J \sigma \right)^2 W + \\ + \frac{J^2}{h_1 y_1^3} \sum \left(\frac{y_1}{h_1} + J \sigma \right) \frac{1}{h_k} \left(3\Delta \frac{\alpha}{n} + \pi \right) - \frac{J^3}{h_1 y_1^3} \sum \frac{1}{h_k^2} \Delta \frac{1}{n^2}. \quad (301)$$

Производя перемножения под знаками сумм, получаем

$$\begin{aligned}
 S_V^* = & \frac{1}{h_1^4} \sum (h_k P + h_k^4 k_k) + \frac{3J}{h_1^3 y_1} \sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma + \\
 & + \frac{3J^2}{h_1^2 y_1^2} \sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma^2 + \frac{J^3}{h_1 y_1^3} \sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma^3 - \\
 & - \frac{3J}{h_1^3 y_1} \sum W - \frac{6J^2}{h_1^2 y_1^2} \sum W \sigma - \frac{3J^3}{h_1 y_1^3} \sum W \sigma^2 + \\
 & + \frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \sum \frac{1}{h_k} \left(3\Delta \frac{\alpha}{n} + \pi \right) + \frac{J^3}{h_1 y_1^3} \sum \frac{1}{h_k} \left(3\Delta \frac{\alpha}{n} + \pi \right) \sigma - \\
 & - \frac{J^3}{h_1 y_1^3} \sum \frac{1}{h_k^2} \Delta \frac{1}{n^2}
 \end{aligned} \tag{302}$$

или

$$\begin{aligned}
 S_V^* = & \frac{1}{h_1^4} \sum (h_k P + h_k^4 k_k) + \frac{3J}{h_1^3 y_1} \left[\sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma - \sum W \right] + \\
 & + \frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \left[3 \sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma^2 - 6 \sum W \sigma + \right. \\
 & + \left. \sum \frac{1}{h_k} \left(3\Delta \frac{\alpha}{n} + \pi \right) \right] + \frac{J^3}{h_1 y_1^3} \left[\sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma^3 - 3 \sum W \sigma^2 + \right. \\
 & + \left. \sum \frac{1}{h_k} \left(3\Delta \frac{\alpha}{n} + \pi \right) \sigma - \sum \frac{1}{h_k^2} \Delta \frac{1}{n^2} \right].
 \end{aligned} \tag{303}$$

Но, обращаясь к формулам (300) для третьей суммы и (294) для второй суммы, выражение для пятой суммы можно записать в более сжатом виде:

$$\begin{aligned}
 S_V^* = & 3S_{III}^* - 3S_{II}^* + S_I^* + \frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \sum \frac{1}{h_k} \pi + \frac{J^3}{h_1 y_1^3} \times \\
 & \times \left[\sum (h_k P + h_k^4 k_k) \sigma^3 - 3 \sum W \sigma^2 + \sum \frac{1}{h_k} \left(3\Delta \frac{\alpha}{n} + \pi \right) \sigma - \right. \\
 & \left. - \sum \frac{1}{h_k^2} \Delta \frac{1}{n^2} \right].
 \end{aligned} \tag{304}$$

Полученные формулы (254), (294), (300), (260) и (304) позволяют оценить влияние положения входного зрачка на aberrации третьего порядка.

Действительно, величина y_1 в совокупности со значением инварианта J позволяет найти величину отрезка x_1 , определяющего положение входного зрачка относительно первой поверхности системы.

Развертывая выражение инварианта J относительно хода главного луча при предмете, расположенном в бесконечности, можно приравнять величину высоты m на входном зрачке к высоте h_1 апертурного луча на первой поверхности системы; таким образом, можно написать

$$J = -m \beta n = -h_1 \beta_1 n_1 = -\frac{h_1 y_1}{x_1} n_1, \quad (305)$$

откуда отношение инварианта J к произведению высот h_1 и y_1 , входящее во все формулы, будет равно

$$\frac{J}{h_1 y_1} = -\frac{n_1}{x_1}. \quad (306)$$

Возвращаясь снова к формулам (254) — (304), видим, что первая сумма, определяющая сферическую абберацию третьего порядка, не зависит от положения зрачка; вторая сумма, определяющая кому системы, в случае, если первая сумма не равна нулю, может быть обращена в нуль соответственным подбором расположения входного зрачка относительно системы. При этом решение задачи будет однозначным.

Обращаясь к третьей сумме, видим, что в нее входят выражения вида $\frac{J^2}{h_1^2 y_1^2}$. Поэтому в случае неравенства нулю первой суммы, приравнивая третью сумму нулю, получаем квадратное уравнение относительно $\frac{1}{x_1}$, что дает два положения входного зрачка (при наличии действительных корней уравнения), обеспечивающих исправление астигматизма в области аббераций третьего порядка.

В случае равенства нулю первой суммы и неравенства нулю второй суммы получаем уравнение первой степени для $\frac{1}{x_1}$ и только одно положение входного зрачка, дающее исправление астигматизма.

В пятую сумму входят выражения вида $\frac{J^3}{h_1^3 y_1^3}$; в силу этого при неравенстве нулю первой суммы получаем в случае равенства нулю пятой суммы кубическое уравнение относительно $\frac{1}{x_1}$ и, следовательно, три положения входного зрачка (если все три корня уравнения будут действительными).

Поскольку во все формулы коэффициент деформации k_k входит в сумме с величиною $h_k P_k$, пользуясь формулой (274), можно несколько упростить выражение для $h_k P_k + h_k^4 k_k$:

$$h_k P_k + h_k^4 k_k = h_k \left(P_k + \frac{(\Delta \alpha n)^3}{(\Delta n)^2} b \right) = h_k P_k^*. \quad (307)$$

Нетрудно видеть, что введение обозначений P^* позволяет формально сохранить во всех зейделевских формулах такие же выражения, какие имели место без деформации сферических поверхностей.

§ 13. Аберрации третьего порядка для тонкого компонента с несферическими поверхностями

При исследовании оптических систем с помощью теории аберраций третьего порядка удобно разделить систему на несколько тонких компонентов (линз), толщинами которых можно пренебрегать. Для этой цели преобразуем формулы для аберраций третьего порядка с учетом деформации поверхностей.

Имея дело с таким тонким компонентом, можно принять, что величины всех толщин в нем равны нулю. Вследствие этого получим равенство всех высот h_k в тонком компоненте и первой высоты h_1 , а также равенство всех величин σ , входящих в зейделевские формулы, нулю.

Исходя из этого, преобразуем все формулы для тонкого компонента:

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{I}}^* &= \frac{1}{h_1^3} \sum P + \sum k \\ S_{\text{II}}^* &= \frac{1}{h_1^3} \left[\sum P - \frac{J}{y_1} \sum W \right] + \sum k \\ S_{\text{III}}^* &= \frac{1}{h_1^3} \left[\sum P - 2 \frac{J}{y_1} \sum W + \frac{J^2}{y_1^2} \sum \Delta \frac{\alpha}{n} \right] + \sum k \\ S_{\text{IV}}^* &= - \frac{J^2}{h_1^2 y_1^2} \sum \frac{\Delta v}{r} \\ S_{\text{V}}^* &= \frac{1}{h_1^3} \left[\sum P - 3 \frac{J}{y_1} \sum W + \frac{J^2}{y_1^2} \sum \left(3 \Delta \frac{\alpha}{n} + \pi \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{J^3}{y_1^3} \sum \Delta \frac{1}{n^2} \right] + \sum k \end{aligned} \right\} \quad (308)$$

Во все суммы формулы (308) (кроме четвертой, пецвалеовой, суммы) коэффициент деформации k входит в виде одного и того же дополнительного слагаемого. Дадим этому коэффициенту физическую интерпретацию. Возвращаясь к формуле (240), определявшей абсциссы x точек профиля несферической поверхности (здесь x, y — координаты точек профиля), видим, что разность этих абсцисс с абсциссами точек исходной окружности определяется величиною

$$x - x_0 = \frac{y^4 b}{8r^3}. \quad (309)$$

Выражая в этой формуле коэффициент b через коэффициент k в соответствии с формулой (245):

$$b = \frac{kr^3}{n' - n}, \quad (310)$$

получим

$$\Delta x = \frac{y^4}{8\Delta n} k = By^4. \quad (311)$$

Формула (311) показывает, что коэффициент k непосредственно определяет собою изменение абсцисс деформируемой сферы.

В заключение необходимо отметить, что введение деформации сферических поверхностей может обеспечить исправление лишь какой-либо одной из аберраций тонкого компонента, кроме кривизны поля; таким образом, работа несферической поверхности в тонком компоненте не вносит ничего нового по отношению к прогибу и склейке тонкого компонента из двух или большего числа линз.

ГЛАВА V

НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ РАСЧЕТА ПРОФИЛЕЙ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 14. Коррекционная пластинка Шмидта

По своей идее коррекционная пластинка Шмидта может рассматриваться как тонкий коррекционный элемент с оптической силой, равной нулю, т. е. как тонкий афокальный элемент.

Известно, что, размещая тонкий афокальный элемент в зрачке оптической системы, этим ни в какой степени нельзя повлиять на астигматизм и кривизну поля данной системы. Вместе с тем сферическая aberrация афокального элемента может быть подобрана с таким расчетом, чтобы скомпенсировать сферическую aberrацию основной оптической системы.

Условие афокальности коррекционной пластинки приводит к тому, что при сохранении одной из поверхностей плоской, необходимо и у второй поверхности иметь радиус кривизны в ее вершине равным бесконечности, поэтому профиль указанной поверхности примет вид параболической кривой высшего порядка:

$$x = By^4 + Cy^6 + \dots \quad (312)$$

На рис. 21 показана такая пластинка с деформированной поверхностью. Изменение формы этой деформированной поверхности относительно исходной плоскости создаст некоторое изменение разности хода в лучах пучка, проходящего через пластинку.

Полагая, что профиль деформированной поверхности мало отличается от плоскости, можно принять, что создаваемая деформацией разность хода определится величинами деформации профиля (для параллельного пучка лучей или плоской волны разность хода строго пропорциональна величине деформации).

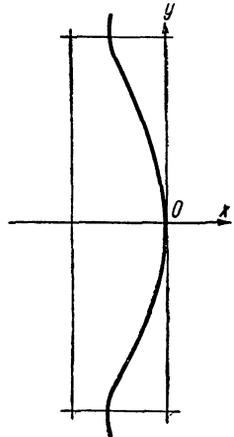


Рис. 21.

Тогда нетрудно определить и величину волновой аберрации, вносимой деформацией поверхности:

$$\varepsilon = (n - 1)x = (n - 1)(By^4 + Cy^6 + \dots). \quad (313)$$

Формула (313) позволяет по известной величине сферической аберрации, выраженной в волновой форме, и при известных значениях ординат профиля определить необходимую для ее компенсации деформацию одной из плоскостей коррекционной пластинки Шмидта.

Устраняя сферическую аберрацию на оси системы с помощью пластинки Шмидта, не всегда удастся устранить сферическую аберрацию по полю зрения, так как величина сферической аберрации для пластинки Шмидта изменяется с изменением угла наклона пучка лучей, падающего на пластинку.

Какой-либо элемент пластинки Шмидта можно рассматривать как некоторый клин с малым преломляющим углом; осевой пучок падает на такой клин под малыми углами. Что касается лучей наклонных пучков, то для них нельзя пренебрегать величиной полевых углов и их влияние необходимо учитывать.

Влияние величины полевых углов в наклонных пучках прежде всего выражается в том, что ширина наклонного пучка, проходящего через те же самые элементы пластинки Шмидта, уменьшится пропорционально косинусу полевого угла; но, кроме того, будут увеличиваться углы отклонения лучей при наклонном ходе через элементарные клинья.

Наклонный ход луча через клин с малым преломляющим углом может быть получен из хода луча через плоско-параллельную пластинку при повороте второй плоскости на малый угол γ , что равносильно измерению угла отклонения луча при изменении угла падения i на тот же угол γ .

На рис. 22 показан ход преломленного клином луча до поворота (пунктиром) и после поворота второй плоскости на угол γ .

Отсюда видно, что в этом случае произойдет изменение угла падения di , равное углу γ поворота второй плоскости. Из рис. 22 следует, что

$$\Delta i = i' - i. \quad (314)$$

Дифференцируя, находим угол отклонения луча, создаваемый пластинкой,

$$\alpha = d \Delta i = di' - di. \quad (315)$$

Если же продифференцировать закон преломления, то получим

$$n \cos i \, di = n' \cos i' \, di'.$$

Разделив на $n \sin i = n' \sin i'$, имеем

$$\frac{di}{\operatorname{tg} i} = \frac{di'}{\operatorname{tg} i'}. \quad (316)$$

Поэтому из равенства (315), полагая $n' = 1$, находим

$$\alpha = \left(\frac{\operatorname{tg} i'}{\operatorname{tg} i} - 1 \right) di = \left(n \frac{\cos i}{\cos i'} - 1 \right) \gamma > (n - 1) \gamma = \alpha_0, \quad (317)$$

где угол γ может быть найден как производная от кривой профиля деформированной поверхности:

$$\gamma = \frac{dx}{dy} = 4By^3 + 6Cy^5 + \dots \quad (318)$$

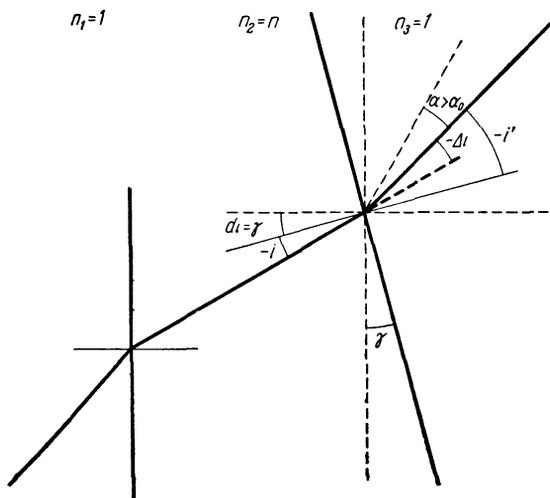


Рис. 22.

При расчете профиля коррекционной пластинки Шмидта исходили из того, что та предназначалась для корректирования сферической aberrации в пучке лучей, близком к параллельному, и что величина ординат на несферической поверхности известна. На самом же деле и при расчетах коррекционных пластинок можем встретиться с необходимостью исправления значительных величин сферической aberrации. В этом случае уже не сможем считать известными величины ординат точек профиля поверхности и их придется определять тем или иным способом.

Решение этой задачи может быть выполнено следующим образом. Совершенно очевидно, что должен быть задан ход лучей, для которых требуется уничтожить сферическую aberrацию. Этот ход лучей можно задать ординатами точек пересечения их с плоскостью, перпендикулярной оси системы и касательной к вершине несферической поверхности, и углами лучей с осью системы — заданием сферической aberrации в угловой форме.

В первом приближении можно принять эти ординаты за ординаты на несферической поверхности (в последующем они будут подвергаться уточнению).

Используя формулу (32) и зная углы u и полагая углы u' равными 0, можно определить углы γ наклона нормали к нашей поверхности с осью системы:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-n \sin u}{n' - n \cos u}. \quad (319)$$

Вместе с тем, дифференцируя общее выражение для профиля несферической поверхности

$$x = By^4 + Cy^6 + \dots, \quad (320)$$

получаем величину тангенса угла γ

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy} = 4By^3 + 6Cy^5 + \dots \quad (321)$$

Считая известными ряд ординат y_0 точек пересечения лучей с осью ординат, составим систему уравнений для некоторых коэффициентов B_0, C_0, \dots , которые можно считать первым приближением для искомым коэффициентов B, C, \dots уравнения (320), если предварительно вычислим по формуле (319) ряд значений $\operatorname{tg} \gamma$. Заметим, что значения $\operatorname{tg} \gamma$ совершенно не зависят от величин ординат y_0 и ординат y профиля истинной кривой.

Выпишем эту систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_1 &= 4B_0 y_{01}^3 + 6C_0 y_{01}^5 + \dots \\ \operatorname{tg} \gamma_2 &= 4B_0 y_{02}^3 + 6C_0 y_{02}^5 + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ \operatorname{tg} \gamma_m &= 4B_0 y_{0m}^3 + 6C_0 y_{0m}^5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (322)$$

Решая эту систему линейных уравнений, найдем ряд приближенных коэффициентов B_0, C_0, \dots . Подставляя значения данных коэффициентов в исходное уравнение профиля (320), можно вычислить ряд значений величин x_{01}, x_{02} и т. д., которые будут являться первым приближением для искомым величин x истинного профиля нашей поверхности.

Нетрудно себе представить, что ординаты точек пересечения лучей y с профилем несферической поверхности будут отличаться от ординат y_0 на величину произведения $x \operatorname{tg} u$.

Таким образом,

$$y = y_0 - x \operatorname{tg} u \quad (323)$$

Обычно величины углов u , определяющих величину исправляемой сферической аберрации, не слишком велики; отсюда, согласно формуле (319), вытекает и сравнительная малость углов γ и абсцисс x .

В формулу (323) входит произведение обеих величин — x и $\operatorname{tg} u$; отсюда можно сделать вывод, что изменение ординат y является величиной еще более малой. Поэтому, пользуясь формулой (323), можно вычислить ряд значений величин y_1 , которые будут отличаться от истинных ординат y профиля несферической поверхности значительно меньше, нежели отличались величины y_0 (так как мы уже учитываем в первом приближении величины абсцисс x_0); эти величины y_1 можно считать вторым приближением.

Далее снова можно вернуться к формуле (322) и заменить в ней величины ординат y_0 первого приближения величинами ординат y_1 второго приближения; решая полученную таким образом новую систему линейных уравнений, найдем ряд значений коэффициентов B_1, C_1, \dots , которые явятся вторым приближением к искомым коэффициентам B, C, \dots .

Повторяя этот процесс нужное число раз, можно найти интересные значения коэффициентов с любой наперед заданной степенью точности.

Небесполезно отметить, что при практическом использовании изложенного метода наблюдается достаточно быстрая сходимость процесса приближений.

§ 15. Коррекционная пластинка с несферической поверхностью вблизи изображения

Иногда прибегают к исправлению дисторсии посредством использования коррекционной пластинки с деформированной поверхностью, расположенной вблизи от изображения (использование выравнивающих стекол в аэрофотоаппаратах). Своеобразие этого заключается в том, что в данном случае существенное значение имеет толщина коррекционной пластинки, тогда как в пластинке Шмидта влияние толщины коррекционной пластинки неощутимо.

На величину изменения дисторсии после коррекционной пластинки влияют следующие факторы:

- 1) толщина пластинки (основная);
- 2) изменение толщины пластинки для разных участков поля зрения (измерение абсцисс профиля несферической поверхности);
- 3) изменение угла главного луча, преломленного деформированной поверхностью, с осью системы.

Предположим, показатель преломления пластинки является постоянным, коррекционная пластинка совмещена своей плоской поверхностью с плоскостью изображения и поле зрения (углы с осью системы для главных лучей) достаточно большое.

На рис. 23 пунктиром показан ход главного луча через исходную плоско-параллельную пластинку, причем главный луч пересекает плоскость изображения на расстоянии y' от оси системы.

После деформирования первой поверхности, выполненного согласно уравнению

$$x = Ay^2 + By^4 + Cy^6 + \dots, \quad (324)$$

ход главного луча показан сплошной линией, и расстояние точки пересечения этого главного луча от оси системы в плоскости изображения представлено величиной y'' .

Из рис. 23 следует, что

$$y'' = y - (d - x) \operatorname{tg} \beta'' \quad (325)$$

и

$$y' = s \operatorname{tg} \beta - d \operatorname{tg} \beta', \quad (326)$$

кроме того,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{s - x}. \quad (327)$$

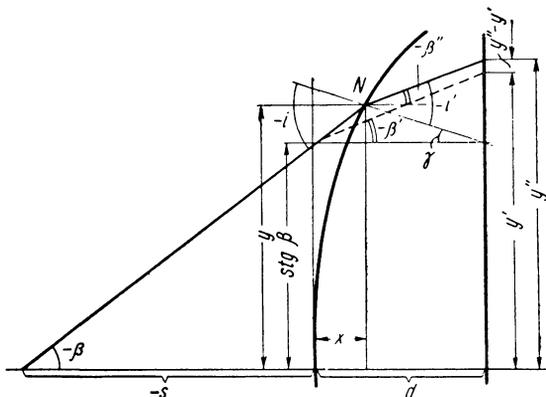


Рис. 23.

Поэтому формулу (326) можно представить в виде:

$$y' = \frac{sy}{s-x} - d \operatorname{tg} \beta' = \frac{y}{1-\frac{x}{s}} - d \operatorname{tg} \beta'. \quad (328)$$

Определим величину разности

$$y'' - y' = y \left[1 - \frac{1}{1-\frac{x}{s}} \right] - (\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta') d + x \operatorname{tg} \beta''. \quad (329)$$

Эта формула может быть преобразована:

$$y'' - y' = y \frac{-\frac{x}{s}}{1-\frac{x}{s}} - (\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta') d + x \operatorname{tg} \beta'' \quad (330)$$

или

$$y'' - y' = -x \operatorname{tg} \beta - (\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta') d + x \operatorname{tg} \beta'', \quad (331)$$

и окончательно

$$y'' - y' = (\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta) x - (\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta') d. \quad (332)$$

Заметим, что формула (332) является точной.

Рассмотрим разность тангенсов во втором члене формулы (332). На рис. 24 показано положение нормали деформированной поверхности в некоторой точке N с координатами x и y .

Для угла поворота нормали γ имеем

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy} = 2Ay + 4By^3 + 6Cy^5 + \dots \quad (333)$$

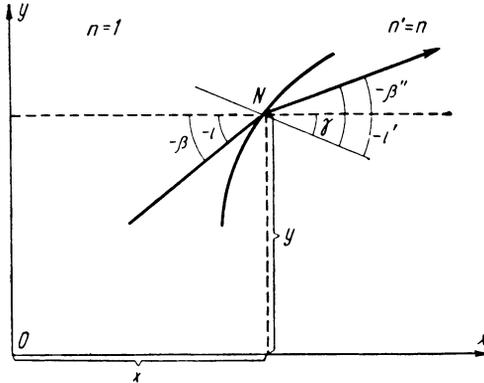


Рис. 24.

Согласно закону преломления,

$$n \sin i = n' \sin i'. \quad (334)$$

При $n = 1$ и $n' = n$ получим

$$\sin i = \sin(\beta - \gamma) = n \sin(\beta'' - \gamma) \quad (335)$$

или

$$\sin \beta \cos \gamma - \sin \gamma \cos \beta = n \sin \beta'' \cos \gamma - n \cos \beta'' \sin \gamma. \quad (336)$$

Если угол γ мал, то формулу (336) можно привести к виду:

$$\sin \beta - \gamma \cos \beta = n \sin \beta'' - \gamma n \cos \beta''; \quad (337)$$

при $\gamma = 0$ β'' переходит в β , и формула (337) приводится к закону преломления

$$\sin \beta = n \sin \beta'. \quad (338)$$

Поэтому формулу (337) можно получить в виде:

$$n(\sin \beta' - \sin \beta'') = \gamma(\cos \beta - n \cos \beta''). \quad (339)$$

Деля обе части формулы (339) на $n \cos \beta''$ и помня, что из той же формулы следует, что $\beta' \approx \beta''$, находим

$$\frac{\sin \beta'}{\cos \beta''} - \operatorname{tg} \beta'' = \gamma \left[\frac{\cos \beta}{n \cos \beta''} - 1 \right] \quad (340)$$

или

$$\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta' \cong \left[1 - \frac{\cos \beta}{n \cos \beta'} \right] \gamma. \quad (341)$$

На основании формулы (341) равенство (332) представим в виде:

$$y'' - y' = (\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta) x - \gamma \left(1 - \frac{\cos \beta}{n \cos \beta'} \right) d \quad (342)$$

или, заменяя в первом члене $\operatorname{tg} \beta''$ на $\operatorname{tg} \beta'$,

$$y'' - y' = (\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \beta) x - \gamma \left(1 - \frac{\cos \beta}{n \cos \beta'} \right) d. \quad (343)$$

Вынося за скобку в первом члене $\operatorname{tg} \beta$, находим

$$y'' - y' = - \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{tg} \beta} \right) x \operatorname{tg} \beta - \gamma \left(1 - \frac{\cos \beta}{n \cos \beta'} \right) d, \quad (344)$$

и окончательно

$$\begin{aligned} y'' - y' &= - \left(1 - \frac{\cos \beta}{n \cos \beta'} \right) (x \operatorname{tg} \beta + \gamma d) = \\ &= (\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \beta) \left(x + \frac{\gamma d}{\operatorname{tg} \beta} \right). \end{aligned} \quad (345)$$

Формула (345) может быть представлена как функция от величины y . Тогда, согласно формулам (324) и (333),

$$\begin{aligned} y'' - y' &= - \left(1 - \frac{\cos \beta}{n \cos \beta'} \right) [(Ay^2 + By^4 + \dots) \operatorname{tg} \beta + \\ &+ (2Ay + 4By^3 + 6Cy^5 + \dots) d]. \end{aligned} \quad (346)$$

Задавая ряд значений величин $y'' - y'$ для соответственных углов β и β' и ординат y , получаем систему линейных уравнений для коэффициентов A, B, C, \dots , решая которую находим значения этих коэффициентов.

Для ряда оптических систем с достаточно большими полями зрения величина $\operatorname{tg} \beta$ близка к единице, поэтому множители при коэффициентах A и B в первом и втором членах формулы (346) отличаются друг от друга как величины отношений

$$\frac{y}{2d}, \frac{y}{4d}, \quad (347)$$

которые в несколько раз больше единицы. Это позволяет в первом приближении пренебрегать в формулах (345) и (346) вторым членом, в который входит толщина d пластинки.

Необходимо отметить, что наличие в наших формулах коэффициента A связано с наличием у деформированной поверхности некоторой оптической силы; вследствие этого возможно некоторое изменение силы всей системы и величины неискаженного изображения.

Однако практически вследствие очень близкого расположения деформированной поверхности к изображению и малости самого коэффициента A (при корригировании малой остаточной дисторсии), его влияние будет неощутимым. Кроме того, коэффициент A всегда можно приравнять нулю.

Осуществив деформирование одной из поверхностей плоско-параллельной пластинки, можно предположить, что такое деформирование известным образом отразится на величине астигматизма, вследствие чего представляется целесообразным выявить степень этого влияния.

Обратимся к рис. 25, на котором представлен ход главного луча, преломленного на деформированной поверхности в некоторой точке N .

Угол главного луча с осью системы примем равным β , углы падения и преломления обозначим соответственно i и i' ; угол поворота нормали выразится через первую производную от уравнения $x = f(y)$ профиля деформированной поверхности, тогда

$$\gamma \cong \operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy}. \quad (348)$$

Величины x и γ предполагаются малыми по отношению к величине y .

Напишем выражения для меридионального и сагиттального лучей

$$-\frac{n \cos^2 i}{t} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_t}, \quad (349)$$

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_s}. \quad (350)$$

Определим величины, входящие в формулы (349) и (350). Из рис. 25 следует

$$t = s = \frac{\frac{d}{n} - x}{\cos \beta}. \quad (351)$$

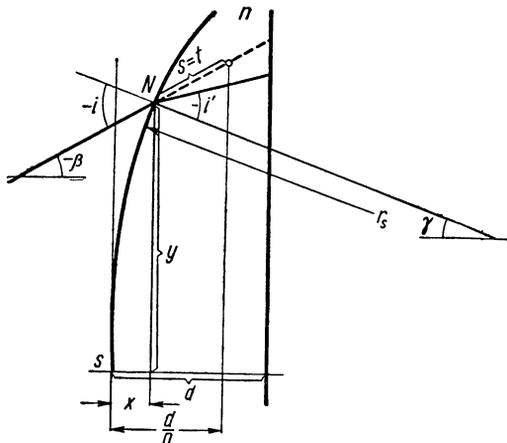


Рис. 25.

Кроме того,

$$-i = -\beta + \gamma, \quad -i' = -\beta' + \gamma. \quad (352)$$

Величина сагиттального радиуса определяется формулой

$$r_s = \frac{y}{\sin \gamma} = \frac{y}{\gamma}, \quad (353)$$

величина меридионального радиуса определяется формулой

$$r_t = \frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2x}{dy^2}} = \frac{(1 + \gamma^2)^{3/2}}{\frac{d\gamma}{dy}}. \quad (354)$$

Так как величину γ полагали малой, то формула (354) может быть представлена в виде:

$$\frac{1}{r_t} = \frac{d\gamma}{dy};$$

кроме того, из формулы (353)

$$\frac{1}{r_s} = \frac{\gamma}{y}. \quad (355)$$

Следовательно, формулы (349) и (350) принимают вид:

$$\frac{n' \cos^2 i'}{i'} - \frac{n \cos^2 i}{i} = (n' \cos i' - n \cos i) \frac{d\gamma}{dy} \quad (356)$$

и

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = (n' \cos i' - n \cos i) \frac{\gamma}{y}. \quad (357)$$

Полагая, что величина x задана уравнением

$$x = f(y) = Ay^2 + By^4 + Cy^6 + \dots, \quad (358)$$

где сходимость ряда обуславливается сходимостью коэффициентов, согласно формуле (348), найдем

$$\gamma = 2Ay + 4By^3 + 6Cy^5 + \dots, \quad (359)$$

и тогда

$$\frac{\gamma}{y} = 2A + 4By^2 + 6Cy^4 + \dots \quad (360)$$

Дифференцируя формулу (359), находим отношение

$$\frac{d\gamma}{dy} = 2A + 12By^2 + 30Cy^4 + \dots \quad (361)$$

Формулы (360) и (361) показывают, что величины $\frac{\gamma}{y}$ и $\frac{d\gamma}{dy}$ соизмеримы друг с другом; когда $\frac{\gamma}{y}$ мало, $\frac{d\gamma}{dy}$ также мало.

Учитывая, кроме того, что величины $\frac{\gamma}{y}$ и $\frac{d\gamma}{dy}$ по отношению к величинам x являются величинами высшего порядка малости, можно в формулах (356) и (357) приравнять правые части нулю. Тогда получим

$$\frac{n' \cos^2 i'}{i'} = \frac{n \cos^2 i}{t}, \quad \frac{n'}{s'} = \frac{n}{s}. \quad (362)$$

Из формулы (362) следует, что в рассматриваемом случае величины t и t' и s и s' связываются друг с другом так же, как и при преломлении на плоскости. Заменяя в формулах (362) углы i' и i на β' и β , нетрудно определить величины t' и s' :

$$t' = \frac{n' \cos^2 \beta'}{n \cos^2 \beta} t, \quad s' = \frac{n'}{n} s. \quad (363)$$

Но так как, согласно формуле (351), $t = s$, то

$$t' = \frac{\cos^2 \beta'}{\cos^2 \beta} s' \quad (364)$$

и величина астигматизма, вносимого всей деформированной пластинкой,

$$t' - s' = \left[\frac{\cos^2 \beta'}{\cos^2 \beta} - 1 \right] s' = \frac{n'}{n} \left[\frac{\cos^2 \beta'}{\cos^2 \beta} - 1 \right] \frac{\frac{d}{n} - x}{\cos \beta}. \quad (365)$$

Изменение астигматизма, вносимое только деформацией, определяется следующим образом:

$$t' - s' = \frac{n'}{n} \left[1 - \frac{\cos^2 \beta'}{\cos^2 \beta} \right] \frac{x}{\cos \beta} \quad (366)$$

или, полагая, что $n = 1$ и $n' = n$ (коэффициент преломления пластинки),

$$t' - s' = \frac{(1 - n^2)}{n \cos \beta} x \operatorname{tg}^2 \beta. \quad (367)$$

Далее, переходя к проекциям астигматизма на ось системы, получим

$$(t' - s') \cos \beta = - (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \beta \frac{x}{n} = x_t - x_s. \quad (368)$$

Формула (368) свидетельствует о том, что величина астигматизма, вносимого деформацией поверхности (при полях зрения $2\beta = 90^\circ$ и более), соизмерима с абсциссой x деформированного профиля.

Равным образом, возвращаясь к формуле (345), можно считать, что при достаточно больших полях зрения второй член $\frac{\gamma d}{\operatorname{tg} \beta}$ во вторых скобках существенно меньше величины x .

Вместе с тем из формулы (345) вытекает, что первый множитель в этой формуле по своей величине соизмерим с единицей; отсюда

следует, что и величина x деформации поверхности соизмерима с величиной исправляемой дисторсии.

Следует отметить, что при уменьшении величины поля зрения коэффициент при x убывает; следствием этого явится уменьшение величины $y'' - y'$ по отношению к величинам x .

Иными словами, при уменьшении поля зрения изменения профиля возрастают и могут оказаться неприемлемыми. Это обстоятельство в известной степени ограничивает возможности использования деформирования поверхности у плоско-параллельной пластинки, размещенной вблизи изображения. Поэтому в ряде случаев представляется целесообразным расширить возможности использования коррекционных пластинок с деформированными поверхностями, отказываясь от условия их размещения в непосредственной близости к изображению.

§ 16. Коррекционная пластинка с деформированной поверхностью, расположенная между выходным зрачком и изображением

Рассмотрим случай применения коррекционной пластинки с несферической поверхностью, когда она находится между выходным зрачком и поверхностью изображения.

На рис. 26 показана тонкая коррекционная пластинка, расположенная в некоторой точке S между выходным зрачком C' и изображением

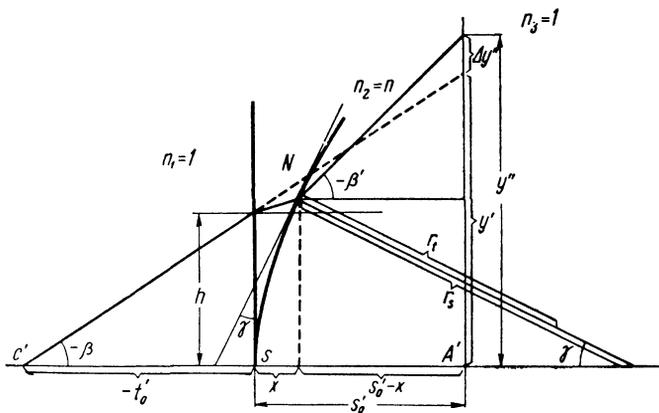


Рис. 26.

жением A' , где x и y — координаты некоторой точки N второй, несферической поверхности, имеющей в точке S радиус кривизны, равный бесконечности; y' — изображение, получаемое без коррекционной пластинки; y'' — изображение, получаемое после введения коррекционной пластинки; β и β' — углы между главным лучом и осью оптической системы до преломления луча и после преломления

его пластинкой; h — высота главного луча на первой плоской поверхности пластинки; $-t'_0$ — расстояние от пластинки до центра выходного зрачка; s'_0 — расстояние от пластинки до плоскости изображения. Из рис. 26 следует, что

$$\Delta y'' = y'' - y'. \quad (369)$$

Кроме того,

$$y'' = y - (s'_0 - x) \operatorname{tg} \beta', \quad (370)$$

$$y' = -(s'_0 - t'_0) \operatorname{tg} \beta. \quad (371)$$

Высота главного луча на первой плоской поверхности пластинки

$$h = t'_0 \operatorname{tg} \beta. \quad (372)$$

Найдем разность между ординатой y точки преломления луча на второй поверхности и высотой h на первой поверхности. Обращаясь к рис. 27, на котором показана часть рис. 26, находим

$$y - h = -x \operatorname{tg} i'_1. \quad (373)$$

На основании формул (372) и (373) величины y'' и $\Delta y''$ представим в следующем виде:

$$y'' = t'_0 \operatorname{tg} \beta - x \operatorname{tg} i'_1 - (s'_0 - x) \operatorname{tg} \beta', \quad (374)$$

$$\Delta y'' = s'_0 \operatorname{tg} \beta - x \operatorname{tg} i'_1 - (s'_0 - x) \operatorname{tg} \beta' \quad (375)$$

или

$$\Delta y'' = s'_0 (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta') - x (\operatorname{tg} i'_1 - \operatorname{tg} \beta'). \quad (376)$$

Угол γ нормали с осью оптической системы определится, как и ранее, первой производной от функции, определяющей профиль несферической поверхности.

Условимся величины абсцисс профиля поверхности x считать малыми.

Из рис. 27 получаем следующие зависимости между углами:

$$-i_2 = -i'_1 + \gamma, \quad -\beta' = -i'_2 - \gamma. \quad (387)$$

Согласно закону преломления

$$n \sin i_1 = \sin \beta, \quad n \sin i_2 = \sin i'_2. \quad (378)$$

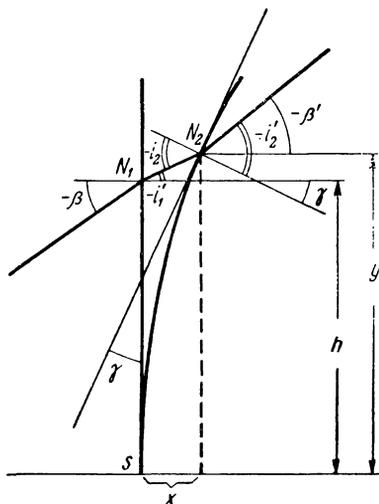


Рис. 27.

Пользуясь полученными формулами, определим величину $\Delta y''$ изменения дисторсии посредством деформирования поверхности пластинки, помещенной на расстоянии t'_0 от выходного зрачка.

Малость величины x деформированной пластинки позволяет применить приближенную формулу, которая будет достаточно точной и для больших полей зрения.

В исследуемом интервале функция x может быть представлена в виде сходящегося ряда:

$$x = By^4 + Cy^6 + \dots \quad (379)$$

Дифференцируя формулу (379), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma = -\frac{dx}{dy} = 4By^3 + \\ + 6Cy^5 + \dots \quad (380) \end{aligned}$$

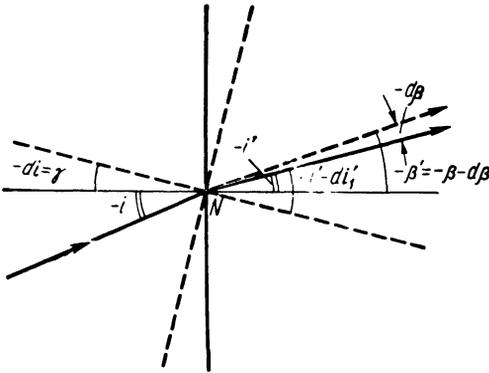


Рис. 28.

Так как величина $\operatorname{tg} \gamma$ одного порядка малости с величиной x , то можно считать, что преломление главного луча на второй поверхности коррекционной пластинки мало отличается от преломления на ее первой плоской поверхности. Поэтому преломление на второй поверхности будем рассматривать как изменение

преломления на первой поверхности, вызванное поворотом нормали на малый угол γ .

На рис. 28 показано, что поворот нормали равносителен приращению $-di$ угла падения луча; при этом будет иметь место приращение угла преломления di' и, как следствие, приращение угла между входящим главным лучом и осью системы.

В соответствии с рис. 28 напишем

$$-i' - di' = -\beta - d\beta - di, \quad (381)$$

откуда

$$-di' = -d\beta - di \quad (382)$$

или

$$d\beta = di' - di. \quad (383)$$

Дифференцируя формулу закона преломления

$$n \sin i = \sin i' = \sin \beta, \quad (384)$$

находим

$$n \cos i \, di = \cos i' \, di', \quad (385)$$

откуда

$$di' = \frac{n \cos i}{\cos i'} \, di = - \frac{n \cos i}{\cos \beta} \, \gamma. \quad (386)$$

Приращение угла, образованного главным лучом с осью системы, равно

$$d\beta = \left[\frac{n \cos i}{\cos i'} - 1 \right] di' \quad (387)$$

или

$$d\beta = \left[1 - \frac{n \cos i}{\cos \beta} \right] \gamma = \left[1 - \frac{n \cos i_1}{\cos i'_1} \right] \gamma. \quad (388)$$

Найдем разность тангенсов углов β и β' :

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta' = - \left[1 - \frac{n \cos i}{\cos \beta} \right] \frac{\gamma}{\cos^2 \beta} \quad (389)$$

или

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta' = - (\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} \beta) \frac{\gamma}{\cos^2 \beta \operatorname{tg} i}. \quad (390)$$

Пользуясь формулами (376) и (390), определим

$$\Delta y'' = - s'_0 (\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} \beta) \frac{\gamma}{\cos^2 \beta \operatorname{tg} i} - x (\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} \beta) \quad (391)$$

или

$$\Delta y'' = - (\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} \beta) \left(\frac{s'_0 \gamma}{\cos^2 \beta \operatorname{tg} i} + x \right). \quad (392)$$

Так как для первой плоской преломляющей поверхности углы i и β играют роль углов i'_1 и i_1 , то формулу (392) можно преобразовать:

$$\Delta y'' = - (\operatorname{tg} i'_1 - \operatorname{tg} i_1) \left(\frac{s'_0 \gamma}{\cos^2 i_1 \operatorname{tg} i'_1} + x \right) \quad (393)$$

или

$$\Delta y'' = - \left(1 - \frac{n \cos i'_1}{\cos i_1} \right) \left(\frac{s'_0 \gamma}{\cos^2 i_1} + x \operatorname{tg} i'_1 \right). \quad (394)$$

Рассмотрим формулу (394) более детально. Сопоставляя члены уравнения, заключенные во вторые скобки, видим, что в первом из них величина γ значительно меньше, нежели величина x во втором. Однако вместе с множителем s'_0 первый член может оказаться соизмеримым со вторым членом или даже быть больше его.

Таким образом, для преломляющей поверхности, расположенной на значительном расстоянии от плоскости изображения, величина углового наклона кривой играет существенную роль, тогда как для

несферической поверхности, расположенной вблизи плоскости изображения, этот наклон не мог сколько-нибудь заметно влиять на изменение дисторсии.

Перейдем к рассмотрению случая, когда изображение находится в бесконечности. В соответствии с формулами (371) и (394) относительная дисторсия может быть представлена формулой

$$\frac{\Delta y''}{y'} = \frac{\left(1 - \frac{n \cos i'_1}{\cos i_1}\right)}{\left(s'_0 - t'_0\right) \operatorname{tg} \beta} \left(\frac{s'_0 \gamma}{\cos^2 i_1} + x \operatorname{tg} i'_1\right). \quad (395)$$

Разделив числитель и знаменатель ее на величину отрезка s'_0 , получим

$$\frac{\Delta y''}{y'} = \frac{\left(1 - \frac{n \cos i'_1}{\cos i_1}\right)}{\left(1 - \frac{t'_0}{s'_0}\right) \operatorname{tg} \beta} \left(\frac{\gamma}{\cos^2 i_1} + \frac{x}{s'_0} \operatorname{tg} i'_1\right). \quad (396)$$

Если плоскость изображения находится в бесконечности, то относительная дисторсия

$$\frac{\Delta y''}{y'} = \left(1 - \frac{n \cos i'_1}{\cos i_1}\right) \frac{\gamma}{\sin i_1 \cos i_1}. \quad (397)$$

Формула (397) показывает, что в данном случае деформация поверхности пластинки непосредственно не влияет на величину дисторсии — последняя будет определяться углом γ между осью ординат (см. рис. 27) и касательной к деформированной поверхности в точке преломления луча, т. е. величиной первой производной от функции, определяющей профиль поверхности.

Остановимся на астигматизме, вносимом коррекционной пластинкой с несферической поверхностью. На рис. 26 изображена линза нулевой толщины, первая поверхность которой плоская, а вторая — несферическая.

Будем считать, как и раньше, $n_1 = 1$, $n_2 = n$ и $n_3 = 1$; r_t — меридиональный радиус кривизны, r_s — сагиттальный радиус кривизны (см. рис. 26). Сагиттальный радиус может быть образован покачиванием плоскости чертежа вокруг оси системы на некоторый малый угол φ вокруг оси системы. Поэтому можно написать

$$r_s = \frac{y}{\sin \varphi}. \quad (398)$$

Для меридионального радиуса кривизны имеем

$$r_t = \frac{1}{x'' \cos^3 \gamma}. \quad (399)$$

Величина сагиттального радиуса может быть представлена также в виде:

$$r_s = \frac{y}{\operatorname{tg} \gamma \cos \gamma} = \frac{y}{x' \cos \gamma}. \quad (400)$$

В частном случае, если ограничиться в качестве профиля несферической поверхности параболой четвертой степени

$$x = Ay^4, \quad (401)$$

то первая производная будет

$$x' = 4Ay^3, \quad (402)$$

а вторая

$$x'' = 12Ay^2. \quad (403)$$

На основании формул (399) — (403) получаем

$$r_s = \frac{1}{4Ay^2 \cos \gamma} \quad (404)$$

и

$$r_t = \frac{1}{12Ay^2 \cos^3 \gamma} = \frac{r_s}{3 \cos^2 \gamma} \cong \frac{r_s}{3}. \quad (405)$$

Для плоской поверхности

$$\frac{n'_1 \cos^2 i'_1}{t'_1} = \frac{n_1 \cos^2 i_1}{t_1} = \frac{\cos^2 i_1}{t_1} \quad (406)$$

и

$$\frac{n'_1}{s'_1} = \frac{n_1}{s_1} = \frac{1}{s_1}.$$

Так как величина x очень мала по сравнению с отрезками s'_1 и t'_1 , то можно считать, что отрезки s_2 и t_2 для второй деформированной поверхности равны s'_1 и t'_1 для плоской поверхности пластинки. Тогда

$$\frac{n \cos^2 i_2}{t_2} = \frac{\cos^2 i_1}{t_1}, \quad \frac{n}{s_2} = \frac{1}{s_1}. \quad (407)$$

Напишем сагиттальный и меридиональный инварианты для нашей несферической поверхности

$$\Phi_t = \frac{n'_2 \cos^2 i'_2}{t'_2} - \frac{n_2 \cos^2 i_2}{t_2} = \frac{n'_2 \cos i'_2 - n \cos i_2}{r_t} \quad (408)$$

и

$$\Phi_s = \frac{n'_2}{s'_2} - \frac{n}{s_2} = \frac{n'_2 \cos i'_2 - n \cos i_2}{r_s}, \quad (409)$$

так как при малом γ углы $i'_2 \approx i_1 = \beta$, или

$$\frac{1}{t'_2} - \frac{1}{t_1} = \frac{\cos i'_2 - n \cos i_2}{r_t \cos^2 \beta} = \frac{3\varphi_s}{\cos^2 \beta} \quad (410)$$

и

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_1} = \frac{\cos i'_2 - n \cos i_2}{r_s} = \varphi_s. \quad (411)$$

Зная величины t_1 и s_1 , при условии равенства отрезков t'_2 и s'_2 — случай уничтожения астигматизма — по формулам (410) и (411) можно определить величину φ_s , а следовательно, и профиль несферической поверхности.

Возвратимся к формулам (394) и (397). В частном случае, когда величина s'_0 мала, а следовательно, мал и первый член во вторых скобках формулы (394), величина дисторсии, исправляемой деформированной поверхностью, определяется вторым членом. Тогда величина деформации x будет зависеть только от $\text{tg } i'_1$ и при малых углах i'_1 может принимать большие значения, практически неприемлемые. Поэтому коррекционную пластинку с деформированной поверхностью не всегда следует помещать вблизи изображения, что вытекает также из формулы (397), которая соответствует расположению изображения в бесконечности. В этих случаях коррекционную пластинку целесообразно удалять от плоскости изображения.

Из формул (401), (402) и (410), относящихся к частному случаю, когда образующей профиля поверхности служит парабола четвертой степени, видно, что при заданных положениях деформированной поверхности, поле зрения и величине исправляемой дисторсии коэффициент A определяется однозначно. Вследствие этого радиусы кривизны r_t и r_s , обуславливающие изменение астигматизма, вносимого деформированной поверхностью, будут иметь совершенно определенную величину. Формулы (404), (405) и (408) — (411) позволяют решить и обратную задачу — использование коррекционной пластинки для исправления астигматизма.

§ 17. Определение профиля несферической поверхности, расположенной внутри системы

Поставим более общую (по сравнению с тем, что было дано в § 14) задачу определения профиля несферической поверхности, расположенной внутри системы. В этом случае понадобится решить две вспомогательные задачи: 1) определение точки встречи луча с поверхностью и 2) согласование хода лучей до и после несферической поверхности — при соблюдении условия прохождения луча после системы через заданную точку изображения.

Для решения обеих задач воспользуемся методом ряда последовательных приближений; будем полагать, что задается ход несколь-

ких лучей, например, для исправления дисторсии в нескольких заданных точках поля или для исправления сферической аберрации для лучей, идущих на нескольких высотах.

В равной степени можно было бы поставить задачу получения тех или иных аберраций определенных величин, не равных нулю. Обратимся к рис. 29, где представлен ход некоторого луча ANA' , исходящего из заданной точки на предмете A , прошедшего через несколько преломляющих сферических (или несферических) поверхностей, встретившего в некоторой точке N поверхность, профиль которой требуется определить, и попадающего после прохождения нескольких последующих поверхностей в точку A' на плоскости (или поверхности) изображения.

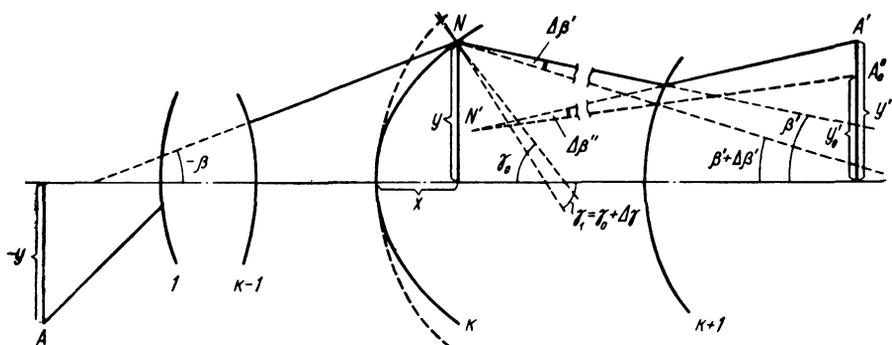


Рис. 29.

Предположим далее, что был известен какой-то начальный профиль этой поверхности, заданный уравнением

$$y^2 = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots \quad (412)$$

В частном случае можем принять за начальный профиль даже окружность радиуса $r_0 = \frac{A}{2}$.

Просчет луча через поверхность начального профиля всегда можем осуществить, пользуясь формулами, приведенными в §§ 8—12 главы II.

В результате этого получим для всех интересующих лучей координаты их точек пересечения с преломляющей поверхностью. Все эти лучи пересекут поверхность изображения; тем самым сможем определить координаты всех получившихся точек пересечения.

Можем задать также для всех лучей точки A'_0, \dots , через которые эти лучи должны будут пройти после получения нужного профиля рассматриваемой поверхности. Для достижения этой цели потребуется изменить начальный профиль поверхности таким образом, чтобы лучи после преломления на измененной поверхности пошли по новым направлениям, показанным на рис. 29 пунктиром.

Нетрудно увидеть, что новые направления преломленных лучей составят с исходными направлениями некоторые углы $\Delta\beta'$.

Обратим внимание на то обстоятельство, что новые направления преломленных лучей пересекутся со старыми направлениями на искомом профиле нашей поверхности.

Можно сделать допущение, что истинный профиль поверхности мало отличается от исходного профиля; такое допущение может быть оправдано, например, тем, что расстояния между исходными положениями точек A' ... и заданными положениями A'_0 ... невелики (исправляемые aberrации малы).

Подобное положение возможно тогда, когда aberrации частично уже были скорректированы с помощью использования несферической поверхности второго порядка. Опираясь на такое допущение, определим величину изменения углов для преломленных лучей $\Delta\beta'$, полагая, что преломление происходило в точке преломления лучей на исходном профиле, координаты которого уже были определены.

Наиболее простым способом для этого будет задание хода луча, проходящего через точку преломления на исходном профиле и составляющего некоторый малый угол с исходным направлением преломленного луча.

Продолжая ход такого вспомогательного луча до его пересечения с поверхностью изображения, установим зависимость между углом $\Delta\beta'$ и величиною перемещения точки A' на поверхности изображения; пользуясь этой зависимостью, легко определить для каждого из лучей то значение $\Delta\beta'$, при котором должно произойти исправление исходных aberrаций.

Вслед за этим, пользуясь формулой (32), можно определить необходимые значения углов γ нормалей в точках преломления лучей на исходном профиле поверхности. Вместе с тем, для углов γ есть формула (18), согласно которой

$$2yy' = \frac{2y}{\operatorname{tg} \gamma} = A + 2Bx + 3Cx^2 + \dots \quad (413)$$

Опираясь на сделанное допущение о близости истинного и начального профилей, можно составить систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2y_{01}}{\operatorname{tg} \gamma_{11}} &= A_1 + 2B_1x_{01} + 3C_1x_{01}^2 + \dots \\ \frac{2y_{02}}{\operatorname{tg} \gamma_{12}} &= A_1 + 2B_1x_{02} + 3C_1x_{02}^2 + \dots \\ \frac{2y_{03}}{\operatorname{tg} \gamma_{13}} &= A_1 + 2B_1x_{03} + 3C_1x_{03}^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (414)$$

Решая ее относительно коэффициентов A_1 , B_1 , C_1 и т. д., получим некоторое новое уравнение профиля

$$y^2 = A_1x + B_1x^2 + C_1x^3 + \dots, \quad (415)$$

которое мало отличается от исходного профиля, определявшегося уравнением (412).

Далее можно определить точки встречи всех рассматриваемых лучей с этим новым профилем и, просчитав затем все лучи через последующую часть системы, найти новые положения точек A'_1 , которые будут расположены значительно ближе к требуемым положениям точек A'_0 , нежели исходные точки A' .

В результате этих действий мы приходим по отношению к новому профилю, определяемому формулой (415), к тому же самому положению, от которого мы начинали вести вычисления при исходном профиле.

Поэтому можно повторить все операции снова и продолжать этот процесс до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность совпадения точек A'_k, \dots и A'_0 .

Оценим быстроту сходимости этого процесса. Дифференцируя формулу (413) относительно коэффициентов $A, B, C \dots$ и угла γ , получаем

$$\frac{2y \, d\gamma}{\sin^2 \gamma} = dA + 2dBx + 3dCx^2 + \dots \quad (416)$$

Из формулы (416) сразу можно установить малость изменений коэффициентов dA, dB, dC и т. д. Кроме того, всегда можно принять, что коэффициент A сохраняется неизменным (сохраняется радиус кривизны в вершине поверхности, благодаря чему сохраняется также фокусное расстояние системы и расположение изображения), т. е. $dA = 0$.

Этим самым и обуславливается близость измененного и начального профилей друг другу. Действительно, дифференцируя формулу (412) при постоянном y , получаем

$$0 = x \, dA + dx \, A + x^2 \, dB + 2x \, dx \, B + x^3 \, dC + 3Cx^2 \, dx \dots \quad (417)$$

Это выражение можно представить и в виде:

$$-(A + 2Bx + 3Cx^2 + \dots) \, dx = x \, dA + x^2 \, dB + x^3 \, dC + \dots \quad (418)$$

или, имея в виду формулу (413),

$$dx = -\frac{\operatorname{tg} \gamma}{2y} (x \, dA + x^2 \, dB + x^3 \, dC + \dots), \quad (419)$$

откуда сейчас же следует, что в случае малости величин $dA, dB, dC \dots$ величина dx также будет мала.

Однако из формул (416) и (419) не вытекает, что изменение абсцисс dx является величиной более высокого порядка малости, нежели величина $d\gamma$. Тем не менее высказанное утверждение о быстрой сходимости процесса последовательных приближений может быть обосновано, если учесть, что общее выражение (412) строится на основе сходимости степенного ряда, в который разлагается функция $y^2 = f(x)$.

Такая сходимость, когда наблюдается быстрое уменьшение по абсолютной величине членов разложения, содержащих x в возрастающих степенях, практически в большинстве случаев имеет место.

Соответственным подбором масштаба коэффициентов (согласно соображениям, рассмотренным в § 1), всегда можно прийти к тому, что величины коэффициентов A, B, C и т. д. будут иметь один и тот же порядок; тогда сами величины x будут малыми величинами и порядок малости их степеней определит собою порядок изменения величин dx .

Заметим также, что быстрая сходимость процесса последовательных приближений наблюдается и тогда, когда ход корригируемых

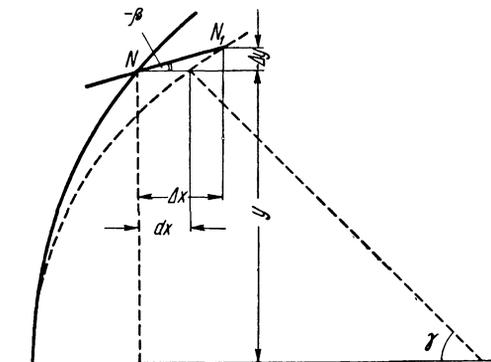


Рис. 30.

лучей близок к направлению нормали к несферической поверхности, т. е. тогда, когда углы падения и преломления i и i' относительно малы.

При переходе от одного профиля к другому произойдет изменение координат точек N и N_1 встречи лучей до и после изменения профиля; эти изменения координат связаны между собою через угол наклона падающего луча к оси системы согласно рис. 30, на котором представлены исходный и измененный профили и точки пересечения с ними падающего луча N и луча N_1 , составляющего с осью системы угол β . В соответствии с рис. 30 напомним

$$\Delta y = -\operatorname{tg} \beta \Delta x. \quad (420)$$

С другой стороны, зная величину тангенса угла γ между нормалью и осью системы, свяжем величины Δx , Δy и dx :

$$\Delta y = \frac{\Delta x - dx}{\operatorname{tg} \gamma}. \quad (421)$$

Имея в распоряжении формулы (420) и (421) и зная величину dx , найдем величину Δx и Δy . Действительно,

$$-\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \cdot \Delta x - \Delta x = -dx, \quad (422)$$

откуда

$$\Delta x = \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} \quad (423)$$

и

$$\Delta y = - \frac{\operatorname{tg} \beta dx}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}. \quad (424)$$

Формулы (423) и (424) показывают, что точка N_1 встречи луча с измененным профилем переместится относительно своего исходного положения на малую величину; это обстоятельство позволяет ускорить процесс нахождения точки встречи луча с измененным профилем поверхности.

**МАЛОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ
С ЦЕЛЬЮ УНИЧТОЖЕНИЯ АБЕРРАЦИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ****§ 18. Постановка задачи**

Создавая ту или иную оптическую систему, необходимо помнить, что хорошее качество изображения при достаточно больших апертурах и достаточно большом поле зрения можно обеспечить путем соответствующего исправления всех ее aberrаций.

Для решения этой задачи формально следует в первом приближении приравнять все коэффициенты в формулах Зейделя нулю, уничтожив в вычисляемой системе все aberrации третьего порядка. Совершенно очевидно, что решение подобной задачи будет выполнимо лишь в том случае, если разрабатываемая система обладает такими конструктивными элементами, изменение которых достаточно энергично влияет на изменение aberrаций системы в достаточно широких диапазонах.

Однако из практики расчета оптических систем достаточно хорошо известно, что уничтожение aberrаций третьего порядка само по себе еще не является гарантией равенства нулю или хотя бы малости реальных aberrаций; это в достаточной мере объясняется наличием у системы aberrаций высших порядков, трудно поддающихся исправлению. Поэтому в подавляющем большинстве случаев при расчете реальных оптических систем с достаточно высокими оптическими характеристиками прибегают к частичной компенсации aberrаций высших порядков введением aberrаций третьего порядка, равных по абсолютной величине aberrациям высших порядков, но обратных им по знаку.

Однако такая компенсация aberrаций осуществима лишь для какого-нибудь одного полевого или апертурного угла (например, для края поля зрения или для края отверстия); для других углов нельзя получить полной компенсации (в силу различного характера роста aberrаций высших порядков и aberrаций третьего порядка).

Совершенно очевидно, что следствием такой неполной компенсации явится возникновение остаточных зональных aberrаций,

величина которых и будет лимитировать собою развитие поля зрения и апертуры в разрабатываемой системе. Вместе с тем определение параметров системы при равенстве зейделевских коэффициентов нулю никак не может дать конкретных значений aberrаций высших порядков; эти значения могут быть определены лишь на основании тригонометрического просчета лучей через вычисляемую систему.

Имея в своем распоряжении величины aberrаций высших порядков и делая допущение, что они будут мало изменяться с изменением коэффициентов aberrаций третьего порядка, можно задать зейделевским коэффициентам значения, отличные от нуля, и снова решить систему зейделевских уравнений, найдя новые значения параметров, определяющих собою оптическую систему; однако и после этого следует произвести контрольные тригонометрические просчеты лучей, во-первых, во избежание возникновения расхождений и, во-вторых, для определения величин остаточных зональных aberrаций. Нетрудно себе представить, что при такой методике расчета нет возможности воздействовать на величины остаточных зональных aberrаций.

Следует отметить, что, пользуясь тригонометрическим просчетом лучей через оптическую систему, относительно которой известно, что в ней имеется нужное число параметров для исправления всех ее aberrаций, очень нетрудно найти значения тех параметров, для которых будет иметь место требуемое исправление aberrаций; таким образом, можно избежать весьма трудоемкой и малоэффективной работы по определению зейделевских коэффициентов при сравнительно небольшом увеличении объема тригонометрических просчетов хода лучей.

Поэтому и неудивительно, что к использованию зейделевских формул прибегают лишь только тогда, когда вследствие недостаточного опыта не удастся заранее выявить характер зависимостей между aberrациями и параметрами оптической системы.

Однако, обращаясь к использованию несферических поверхностей в оптических системах, можно заметить, что замена сферической поверхности несферической поверхностью второго порядка, обладающей тем же самым радиусом кривизны в вершине, что и исходная сферическая поверхность, не вызывала изменения фокусного расстояния оптической системы, а создавала лишь изменение коэффициентов aberrаций третьего порядка; при этом профиль поверхности претерпевал изменение, характеризующееся величинами четвертого порядка.

В равной степени представляется возможным производить изменения профиля несферической поверхности более высокого порядка, сохраняя неизменными величины коэффициентов aberrаций третьего порядка. Совершенно очевидно, что такие изменения профиля поверхности влияют лишь на aberrации высших порядков, позволяя изменять их по нашему усмотрению (в частном случае представляется возможным приравнять aberrации высших порядков нулю). Это позволяет (учитывая, что в подавляющем большинстве случаев

уничтожение aberrаций третьего порядка легко осуществимо и без использования несферических поверхностей второго порядка) уничтожать остаточные aberrации высших порядков за счет введения деформации сферических поверхностей тоже только высшего порядка, что приводит к весьма незначительным отступлениям от сфер на самом краю поверхности к так называемой «асферизации» поверхностей.

§ 19. Деформированная плоскость (планоидная поверхность)

Обращаясь к формуле (7), видим, что равенство нулю первого коэффициента A обеспечивает равенство бесконечности радиуса кривизны поверхности в ее вершине; коэффициент B , определявший собою величину второго члена формулы (7), определял вместе с тем и величину коэффициента K , входившего в формулы aberrаций третьего порядка.

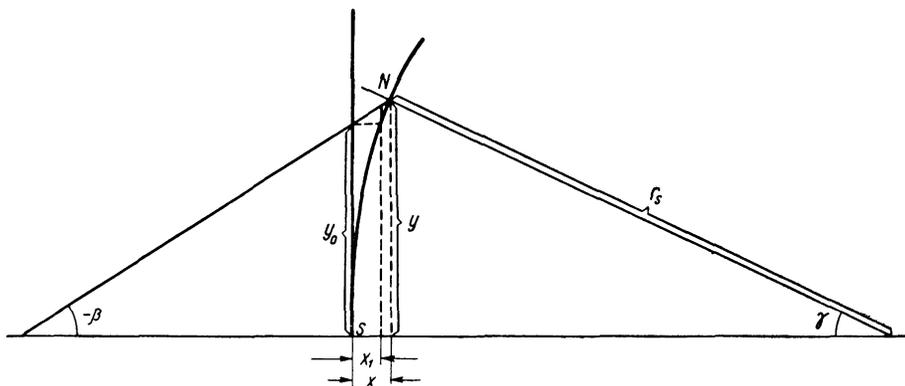


Рис. 31.

В нашем же случае в соответствии с соображениями, высказанными в предыдущем параграфе, не будем воздействовать на aberrации третьего порядка, поэтому и примем, что коэффициент B также равен нулю.

Таким образом, наша планоидная поверхность, не влияющая на aberrации третьего порядка, имеет профиль, выражающийся уравнением

$$x = Cy^6 + Dy^8 + \dots \quad (425)$$

Ход луча, преломляющегося на такой планоидной поверхности, представлен на рис. 31.

Задаваясь высотой y_0 луча на плоскости, касательной к вершине S планоидной поверхности, определим величину стрелки x_1 , подставляя в формулу (425) величину y_0 :

$$x_1 = Cy_0^6 + Dy_0^8 \dots \quad (426)$$

Далее, имея в своем распоряжении величину x_1 , определим величину y_1 , являющуюся высотой луча на плоскости, проходящей перпендикулярно оси системы на расстоянии x_1 от вершины поверхности S . Эта величина может быть представлена формулой

$$y_1 = y_0 - x_1 \operatorname{tg} \beta. \quad (427)$$

Получив величину y_1 и подставив ее в исходную формулу (425), определим величину x_2 :

$$x_2 = Cy_1^6 + Dy_1^8 + \dots, \quad (428)$$

которую можно снова подставить в формулу (427) вместо величины x_1 и определить затем величину y_2 и т. д.

В пределе, очевидно, получим возможность завершить этот процесс, придя к соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} x &= Cy^6 + Dy^8 + \dots \\ y &= y_0 - x \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \right\} \quad (429)$$

или, исключая величину x ,

$$y = y_0 - (Cy^6 + Dy^8 + \dots) \operatorname{tg} \beta, \quad (430)$$

которое представляет собой уравнение высшего порядка относительно величины y . Для определения углов падения и преломления луча необходимо найти угол γ между нормалью и осью системы. Тангенс этого угла вычисляется согласно формуле

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy} = 6Cy^5 + 8Dy^7 + \dots \quad (431)$$

В случае если planoидная поверхность является параболой шестой степени

$$x = Cy^6, \quad (432)$$

то тогда тангенс угла γ может быть выражен в виде:

$$\operatorname{tg} \gamma = 6 \frac{x}{y}. \quad (433)$$

Перейдем к определению радиусов кривизны. Сагиттальный радиус кривизны r_s может быть получен по формулам (398) и (400), см. § 16. В соответствии с этими формулами получаем

$$r_s = \frac{y}{\sin \gamma} = \frac{y^2}{6x \cos \gamma}. \quad (434)$$

Меридиональный радиус кривизны согласно формуле (399) будет

$$r_t = \frac{1}{\cos^3 \gamma \frac{d^2x}{dy^2}} = \frac{1}{(30Cy^4 + 42Dy^6 + \dots) \cos^3 \gamma}; \quad (435)$$

в частном случае параболы шестой степени

$$r_t = \frac{y^2}{30x \cos^3 \gamma}; \quad (436)$$

кроме того, пользуясь формулой (434), найдем

$$r_t = \frac{r_s}{5 \cos^2 \gamma}. \quad (437)$$

В случае, если угол γ мал,

$$r_s = \frac{y^2}{6x}, \quad r_t = \frac{y^2}{30x}, \quad r_t = \frac{r_s}{5}. \quad (438)$$

Полученные формулы позволяют очень легко определять величину деформации плоскоидной поверхности, необходимой для исправления астигматизма высшего порядка при сохранении неизменным астигматизма третьего порядка. Действительно, напишем для плоскоидной поверхности астигматические инварианты

$$\begin{aligned} \frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos^2 i}{t} &= \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_t}, \quad \frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \\ &= \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_s}; \end{aligned} \quad (439)$$

полагая, что для исходной плоской поверхности углы i и i' будут такими же, как и для деформированной поверхности (это вытекает из пренебрежения углом γ), напишем выражения для астигматических инвариантов

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'_0} - \frac{n \cos^2 i}{t_0} = 0, \quad \frac{n'}{s'_0} - \frac{n}{s_0} = 0. \quad (440)$$

Принимая, что при переходе от плоскоидной поверхности к плоской величины отрезков t и s сохраняются равными t_0 и s_0 (вследствие малости величины абсциссы x деформации плоскоидной поверхности), в формулах (439) заменим величины $\frac{n \cos^2 i}{t}$ и $\frac{n}{s}$ величинами $\frac{n' \cos^2 i'}{t'_0}$ и $\frac{n'}{s'_0}$. Поэтому

$$n' \left(\frac{1}{i'} - \frac{1}{t'_0} \right) \cos^2 i' = 5 \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_s} = 5n' \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s'_0} \right) \quad (441)$$

или

$$\left(\frac{1}{i'} - \frac{1}{t'_0} \right) \cos^2 i' = 5 \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s'_0} \right) = \frac{5}{n'r_s} (n' \cos i' - n \cos i). \quad (442)$$

Заменяя разности обратных величин отрезков t' и t'_0 и s' и s'_0 через разности самих отрезков, формулу (442) преобразуем:

$$-\frac{\Delta t'}{t'^2} \cos^2 i' = -5 \frac{\Delta s'}{s'^2} = 5 \frac{n' \cos i' - n \cos i}{n'r_s} = 5\varphi_s. \quad (443)$$

Задавая разностью изменений отрезков $\Delta t'$ и $\Delta s'$, представляющих собой изменение астигматической разности, и пользуясь формулами (443), легко определить требуемую величину сагиттального радиуса r_s и по этой величине, заменяя в формуле (438) величину x через ее выражение из формулы (432), найти коэффициент C уравнения (432):

$$C = \frac{x}{y^6} = \frac{1}{6r_s y^4}. \quad (444)$$

§ 20. Деформированная сфера

Аналогично случаю planoидной поверхности, служащей для уничтожения aberrаций высших порядков без изменения зейделевских aberrаций, можно воспользоваться малой деформацией сферической поверхности. Для этого случая выгодно воспользоваться заданием профиля поверхности в полярной системе координат. В частности, выгодно разместить начало полярной системы координат в центре сферы радиуса r_0 , равного радиусу кривизны деформированной поверхности. Задавая радиус-вектор r , определяющий положение точек профиля поверхности, в виде функции четных степеней угла φ , напишем

$$r = r_0 + A\varphi^2 + B\varphi^4 + C\varphi^6 + D\varphi^8 + \dots \quad (445)$$

(в данном случае мы принимаем знак радиуса-вектора r одинаковым со знаком r_0 и знак угла φ одинаковым со знаком угла γ).

При этом аналогично случаю planoидной поверхности коэффициенты A и B должны быть равными нулю (это необходимо для соблюдения условия совпадения начала координат с центром сферы радиуса r_0 и соблюдения условия неизменности коэффициентов aberrаций третьего порядка). Таким образом, формула (445) переписывается в виде:

$$r = r_0 + C\varphi^6 + D\varphi^8 + \dots \quad (446)$$

Картина хода луча через деформированную сферическую поверхность представлена на рис. 32, где сплошной линией показан профиль деформированной поверхности и пунктиром — дуга соприкасающейся окружности радиуса r_0 ; γ_0 — угол нормали к этой окружности в точке встречи ее с падающим лучом AN_0 , составляющим с осью системы угол β ; γ — угол нормали, восстановленной к деформированному профилю поверхности в точке встречи ее с лучом; φ — угол радиуса-вектора, соединяющего точку N преломления луча на профиле поверхности с началом координат, с осью системы.

Определим угол падения ω_0 луча с нормалью к соприкасающейся сфере. Согласно известным формулам для сферических поверхностей

$$\sin \omega_0 = \frac{r}{r_0} \sin \beta. \quad (447)$$

Имея в распоряжении угол ω_0 , нетрудно определить величину угла φ_0 , играющего для соприкасающейся сферы роль угла γ_0 :

$$\varphi_0 = \gamma_0 = \beta - \omega_0. \quad (448)$$

Полагая, что деформация поверхности невелика, можно принять величину угла φ_0 как величину угла φ для радиуса-вектора деформированной поверхности и, пользуясь формулой (446), определить приближенное значение радиуса-вектора

$$r_1 = r_0 + C \varphi_0^6 + D \varphi_0^8 + \dots \quad (449)$$

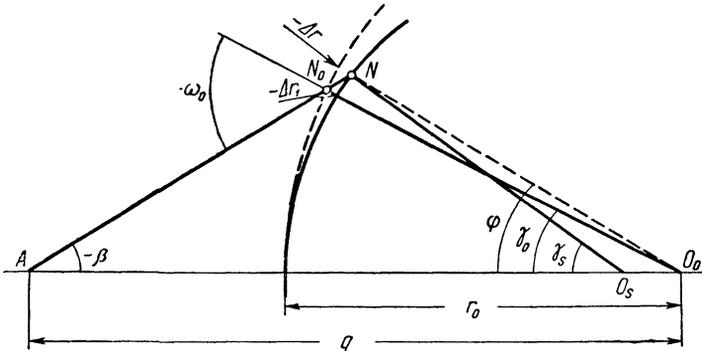


Рис. 32.

Так как радиус-вектор r_1 отсчитывается от начала координат, то можно построить из начала координат сферу этого радиуса. Далее, поскольку расстояние между точкой пересечения A луча с осью и началом координат осталось неизменным, пользуясь формулой (447), найдем величину некоторого нового угла

$$\sin \omega_1 = \frac{q}{r_1} \sin \beta, \quad (450)$$

Используя формулу (448), определим величину нового угла

$$\varphi_1 = \beta - \omega_1 \quad (451)$$

и т. д., повторяя этот процесс до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность определения координат точки встречи луча с деформированной поверхностью, критерием чему может служить малость изменения угла φ при последнем переходе.

Перейдем теперь к определению угла γ нормали к деформированной поверхности с осью системы; величина тангенса данного угла легко находится по известной формуле

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy}. \quad (452)$$

Величины x и y могут быть выражены через полярные координаты

$$x = -r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (453)$$

Дифференцируя формулы (453), находим следующее выражение для тангенса угла γ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{r \sin \varphi \, d\varphi - \cos \varphi \, dr}{r \cos \varphi \, d\varphi + \sin \varphi \, dr}. \quad (454)$$

Разделив числитель и знаменатель этой формулы на дифференциал $d\varphi$, получим

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{r \sin \varphi - \cos \varphi \frac{dr}{d\varphi}}{r \cos \varphi + \sin \varphi \frac{dr}{d\varphi}} \quad (455)$$

или, переходя к тангенсам угла,

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \frac{dr}{r d\varphi}}{1 + \operatorname{tg} \varphi \frac{dr}{r d\varphi}}. \quad (456)$$

Но величину произведения $rd\varphi$ можно рассматривать как дифференциал дуги ds ; тогда формула (456) преобразовывается:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \frac{dr}{ds}}{1 + \operatorname{tg} \varphi \frac{dr}{ds}}. \quad (457)$$

Отношение дифференциала радиуса-вектора к дифференциалу дуги является не чем иным, как тангенсом угла поворота нормали α , и формула (457) может быть переписана в виде:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} (\varphi - \alpha) \quad (458)$$

и, следовательно, величина угла γ может быть найдена как разность углов φ и α :

$$\gamma = \varphi - \alpha. \quad (459)$$

Величину угла α нетрудно найти, дифференцируя формулу (446):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dr}{ds} = \frac{6C \varphi^5 + 8D \varphi^7 + \dots}{r_0 + C \varphi^6 + D \varphi^8 + \dots}. \quad (460)$$

В частном случае деформирования поверхности по закону

$$r = r_0 + C \varphi^6 \quad (461)$$

величина тангенса α будет

$$\operatorname{tg} \alpha = 6 \frac{r-r_0}{r \varphi} = 6 \frac{\Delta r}{r \varphi}. \quad (462)$$

Перейдем к определению радиусов кривизны r_s и r_t . Для радиуса r_s имели выражение (398), см. § 16. Пользуясь этим выражением и имея в виду формулу (453), напомним

$$r_s \sin \gamma = y = r \sin \varphi. \quad (463)$$

Используя формулу (459), представим выражение для сагиттального радиуса r_s кривизны в виде:

$$r_s = r \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma} = r \frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)}. \quad (464)$$

Формула (464) может быть преобразована:

$$r_s = \frac{r}{\cos \alpha \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi}\right)}. \quad (465)$$

В случае если угол α мал и можно пренебречь третьими степенями угла φ , выражение (465) переходит в приближенную формулу

$$r_s = \frac{r}{1 - \frac{6 \Delta r}{r \varphi^2}} = r \left(1 + \frac{6 \Delta r}{r \varphi^2}\right). \quad (466)$$

Перейдем к определению меридионального радиуса кривизны. Пользуясь известной формулой для радиуса кривизны кривой, заданной в полярных координатах [см. формулу (26), § 2], можно написать

$$r_t = \frac{r \left[1 + \left(\frac{dr}{r d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1 + 2 \left(\frac{dr}{r d\varphi}\right)^2 - \frac{d^2 r}{r d\varphi^2}}. \quad (467)$$

Взяв вторую производную от формулы (446), находим

$$\frac{d^2 r}{d \varphi^2} = 30C \varphi^4 + 56D \varphi^6 + \dots \quad (468)$$

В формуле (467) выражения для первой производной — во второй степени. В частном случае, когда профиль поверхности мало отличается от сферы, это позволяет выразить первую производную через Δr . Тогда, согласно формуле (460), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dr}{r d\varphi} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{r \varphi} \left(C \varphi^6 + D \varphi^8 + \frac{1}{3} D \varphi^8 + E \varphi^{10} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} E \varphi^{10} + \dots \right). \end{aligned} \quad (469)$$

Но отделенные члены в формуле (469) суть не что иное, как разность величин r и r_0 . Поэтому

$$\frac{dr}{r d\varphi} = \frac{6 \Delta r}{r \varphi} + \frac{2}{r \varphi} (D \varphi^8 + 2E \varphi^{10} + \dots). \quad (470)$$

Таким образом, из формулы (470) следует, что величины членов, содержащие вторые степени первой производной в формуле (467), являются членами второго порядка малости относительно величины деформации Δr .

Вместе с тем величина второй производной, также входящей в формулу (467), является величиной первого порядка малости относительно величины деформации Δr ; это обстоятельство позволяет получить приближенную формулу для меридионального радиуса кривизны:

$$r_t \cong \frac{r}{1 - \frac{d^2 r}{r d\varphi^2}} = r \left(1 + \frac{d^2 r}{r d\varphi^2} \right) = r + \frac{d^2 r}{d\varphi^2}, \quad (471)$$

а в частном случае, когда уравнением профиля является кривая шестой степени

$$r_t = r + 30C \varphi^4 = r + \frac{30 \Delta r}{\varphi^2}. \quad (472)$$

Сопоставив между собой формулы (472) и (466), напомним выражение, связывающее величины r_t и r_s друг с другом:

$$r_t - r = 5(r_s - r). \quad (473)$$

Рассмотрим далее влияние малой деформации сферической поверхности на изменение астигматизма. Напишем выражения для астигматических инвариантов

$$\frac{n' \cos^2 i'}{i'} - \frac{n \cos^2 i}{t} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_t} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r \left(1 + \frac{\Delta r_t}{r} \right)} \quad (474)$$

и

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r \left(1 + \frac{\Delta r_s}{r} \right)}. \quad (475)$$

Напишем эти же выражения для исходной сферы

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'_0} - \frac{n \cos^2 i}{t_0} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_0} = \frac{n'}{s'_0} - \frac{n}{s_0} \quad (476)$$

и составим разности

$$\begin{aligned} \frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n' \cos^2 i'_0}{t'_0} &= \frac{n \cos^2 i}{t} - \frac{n \cos^2 i_0}{t_0} + \\ + \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_t} &- \frac{n' \cos i'_0 - n \cos i_0}{r_0}. \end{aligned} \quad (477)$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Если величина угла φ , определяющего собой координаты точек профиля деформированной поверхности, достигает значений, близких к 0,5, в соответствии с формулами (466) и (472), то и тогда разности $r_t - r$ и $r_s - r$ будут весьма значительно превосходить величину деформации поверхности Δr . Действительно,

$$r_t - r = \frac{30 \Delta r}{0,25} = 120 \Delta r, \quad r_s - r = \frac{6}{0,25} \Delta r = 24 \Delta r.$$

Это позволяет практически считать величины деформации Δr малыми по отношению к величинам разностей $r_t - r$ и $r_s - r$, благодаря чему в формуле (477) примем значения углов i и i_0 и i' и i'_0 равными друг другу. Таким образом, в формуле (477) можем приравнять в правой части два первых члена друг другу, если величины t и t'_0 равны, что имеет место в тех случаях, когда предмет не изменяет своего положения относительно поверхности после ее деформации.

Вследствие этого формула (477) существенно упрощается:

$$n' \left(\frac{1}{t'} - \frac{1}{t'_0} \right) \cos^2 i' = (n' \cos i' - n \cos i) \left(\frac{1}{r_t} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (478)$$

или

$$-n' \frac{\Delta t'}{t'^2_0} \cos^2 i' = -(n' \cos i' - n \cos i) \frac{\Delta r_t - \Delta r}{r_0^2}. \quad (479)$$

Аналогичным образом обрабатываем выражения для сагиттальной плоскости. Составляя разности между формулами (475) и (476), можно написать

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{s'_0} = \frac{n}{s} - \frac{n}{s_0} + \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_s} - \frac{n' \cos i'_0 - n \cos i_0}{r_0}. \quad (480)$$

Руководствуясь ранее высказанными соображениями о возможности приравнивания величин углов i и i_0 , формулу (480) преобразовываем:

$$n' \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s'_0} \right) = -(n' \cos i' - n \cos i) \frac{\Delta r_s - \Delta r}{r_0^2} = -n' \frac{\Delta s'}{s'^2_0}. \quad (481)$$

Составляя разность между выражениями (479) и (481), получаем

$$\frac{\Delta t'}{t'^2_0} \cos^2 i' - \frac{\Delta s'}{s'^2_0} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{n' r_0^2} (\Delta r_t - \Delta r_s). \quad (482)$$

Пользуясь формулой (473), можно исключить из формулы (482) одну из величин, например Δr_t . Тогда формула (482), учитывая также формулу (466), получит вид:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t'}{t_0'^2} \cos^2 i' - \frac{\Delta s'}{s_0'^2} &= \frac{n' \cos i' - n \cos i}{n' r_0'^2} 4 \Delta r_s = \\ &= \frac{n' \cos i' - n \cos i}{n' r_0'^2} 24 \frac{\Delta r}{\Phi^2}. \end{aligned} \quad (483)$$

Для устранения астигматизма необходимо соблюсти условие

$$t_0'' + \Delta t' = s_0' + \Delta s'. \quad (484)$$

Исходя из этого условия, выразим величину разности $\Delta s'$ через разность $\Delta t'$:

$$\Delta s' = \Delta t' + t_0' - s_0'. \quad (485)$$

Подставляя значение Δs из формулы (485) в формулу (483), сразу же получаем, совместно с формулами (472) и (479), систему уравнений, решение которой позволяет найти интересующую величину необходимой деформации профиля поверхности Δr .

ГЛАВА VII

ИСПРАВЛЕНИЕ ДВУХ АБЕРРАЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ОДНОЙ НЕСФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§ 21. Постановка задачи. Роль расположения поверхности

Рассматривая работу малых деформаций сферической, а также planoидной поверхности, видим, что эти деформации влияют на различные aberrации, например на сферическую aberrацию и астигматизм. В некоторых случаях влияние деформации на какую-либо из aberrаций может быть ослаблено или даже вовсе исключено путем соответственного размещения деформированной поверхности. Так, например, исключается влияние на астигматизм деформации поверхности у коррекционной пластинки, размещаемой в зрачке в системах Шмидта.

Также можно представить, что коррекционная пластинка, устраняющая сферическую aberrацию у какой-либо системы, будет размещена со стороны параллельного хода лучей. Совершенно очевидно, что в этом случае расстояние между коррекционной пластинкой и системой практически не будет сказываться на изменении сферической aberrации в очень широких пределах, однако расположение такой пластинки может очень существенно влиять на изменение астигматизма системы.

Равным образом представим случай размещения коррекционной пластинки, служащей для исправления сферической aberrации, позади оптической системы, в сходящемся ходе лучей; совершенно очевидно, чем ближе к изображению расположена такая пластинка, тем большими будут изменения углов корригируемых лучей с осью системы, что приведет к росту изменения отступлений от закона синусов Аббе и, следовательно, к изменению комы системы.

Оба эти случая представлены на рис. 33 и 34, где пунктиром показано измененное положение коррекционной пластинки по отношению к оптической системе и измененный ход лучей, а сплошными линиями — исходные положения. Но совершенно очевидно, что одновременное исправление двух aberrаций с помощью одной несферической поверхности осуществимо далеко не всегда.

В предыдущей главе говорилось, что для сохранения неизменными аберраций третьего порядка, как сферической аберрации, так и астигматизма, в свою очередь, сохранены неизменными члены, содержащие четвертые степени ординат (для плоскоидных поверхностей) или четвертые степени углов φ (для деформированных сферических поверхностей). Отсюда нетрудно сделать вывод, что одно-

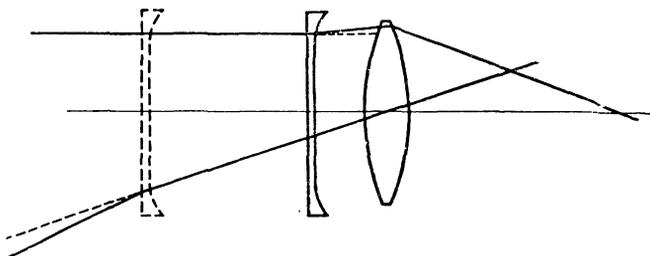


Рис. 33.

временное изменение различных аберраций требует, чтобы они были одного и того же порядка, т. е. корригирование сферической аберрации третьего порядка будет связано с изменением астигматизма также третьего порядка; равным образом изменение астигматизма пятого порядка повлечет за собою изменение сферической аберрации пятого порядка.

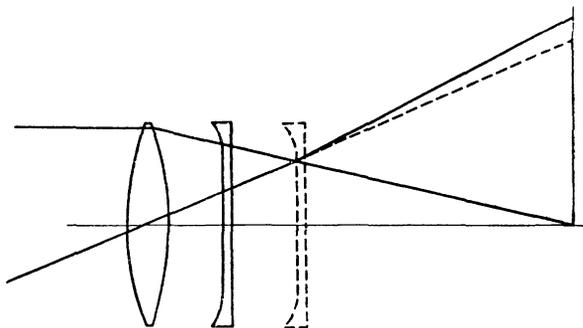


Рис. 34.

Второе условие, необходимое для осуществления совместного исправления двух аберраций, — чтобы обе корригируемые аберрации изменялись при деформации преломляющей поверхности в одну и ту же сторону, в противном случае улучшение одной из аберраций вызовет ухудшение другой.

В-третьих, необходимо, чтобы, изменяя расположение несферической поверхности, было возможно воздействовать на соотношение изменений исправляемых аберраций в достаточно широком диапазоне.

Несоблюдение хотя бы одного из этих трех условий делает невозможным решение поставленной задачи совместного исправления двух aberrаций; отсюда и ограниченность применения этого приема. Необходимо также отметить, что одновременное исправление двух aberrаций одной несферической поверхностью ограничено и тем, что в данном случае исправление aberrаций на нескольких углах поля зрения или нескольких высотах становится невозможным. Однако это последнее замечание не противоречит ранее высказанному положению о возможности использования несферических поверхностей с целью исправления aberrаций высшего порядка при исправлении aberrаций третьего порядка с исходными сферическими поверхностями.

§ 22. Одновременное исправление сферической aberrации и отступлений от условия синусов Аббе

Исследование этого вопроса начнем с наиболее простого случая — использования бесконечно тонкой коррекционной пластинки с planoидной поверхностью, расположенной между выходным зрачком системы и ее задней фокальной плоскостью. Обратимся к рис. 35, где сплошной линией показан ход апертурного луча, пересекающего

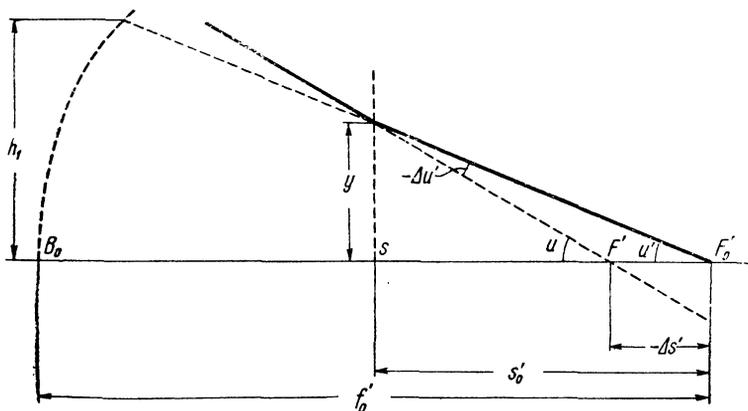


Рис. 35.

ось системы в точке F' и создающего сферическую aberrацию $\Delta s'$. Пунктиром показан ход луча, проходящего через задний фокус системы F'_0 под углом u' , при котором будет соблюдено условие синусов. Высоту луча на коррекционной пластинке обозначим y (так как полагаем, что толщина пластинки равна нулю и деформация профиля пластинки x также мала, величины высот на обеих поверхностях пластинки могут быть приняты равными друг другу); расстояние от пластинки до заднего фокуса системы обозначим s'_0 . Высоту луча на входном зрачке системы примем h_1 .

В случае если известна величина отступления от условия синусов

$$\Delta f' = f' - f'_0, \quad (486)$$

легко можно определить апертурный угол луча, вышедшего из системы, с ее осью. Действительно, фокусное расстояние для рассматриваемого луча может быть представлено формулой

$$f' = \frac{h_1}{\sin u} = f'_0 + \Delta f', \quad (487)$$

откуда и определяется величина синуса u . Аналогичное положение наблюдается и для угла u' :

$$\sin u = \frac{h_1}{f'}, \quad \sin u' = \frac{h_1}{f'_0}. \quad (488)$$

Пользуясь рис. 35, нетрудно установить зависимости между углами u и u' , сферической aberrацией $\Delta s'$ и высотой на коррекционной пластинке. Находим

$$\operatorname{tg} u = \frac{y}{s'_0 + \Delta s'}, \quad \operatorname{tg} u' = \frac{y}{s'_0}. \quad (489)$$

Из формул (489) определим величины отрезков s'_0 и $s'_0 + \Delta s'$:

$$s'_0 = \frac{y}{\operatorname{tg} u'}, \quad s'_0 + \Delta s' = \frac{y}{\operatorname{tg} u}. \quad (490)$$

Составив разность формул (490), можно исключить величины s'_0 . Тогда

$$\Delta s' = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} u} - \frac{1}{\operatorname{tg} u'} \right) y, \quad (491)$$

откуда

$$y = \frac{\Delta s'}{\frac{1}{\operatorname{tg} u} - \frac{1}{\operatorname{tg} u'}}. \quad (492)$$

Далее необходимо определить профиль деформированной поверхности. С этой целью используем формулу для угла нормали к профилю в точке преломления луча с осью системы. Напишем выражение для тангенса угла нормали для второй поверхности коррекционной пластинки:

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{n_3 \sin u_3 - n_2 \sin u_2}{n_3 \cos u_3 - n_2 \cos u_2}. \quad (493)$$

Но так как

$$n_2 \sin u_2 = n_1 \sin u_1 = \sin u, \quad (494)$$

то

$$n_2 \cos u_2 = n_2 \sqrt{1 - \sin^2 u_2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 u}. \quad (495)$$

Пользуясь выражениями (494) и (495), формулу (493) преобразуем:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin u' - \sin u}{\cos u' - \sqrt{n^2 - \sin^2 u}} \quad (496)$$

Если уравнением профиля деформированной поверхности является парабола четвертой степени

$$x = By^4, \quad (497)$$

то величина $\operatorname{tg} \gamma$ выразится следующим образом:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy} = 4By^3 = \frac{\sin u' - \sin u}{\cos u' - \sqrt{n^2 - \sin^2 u}} = \frac{\frac{1}{f'_0} - \frac{1}{f'}}{\cos u' - \sqrt{n^2 - \sin^2 u}}, \quad (498)$$

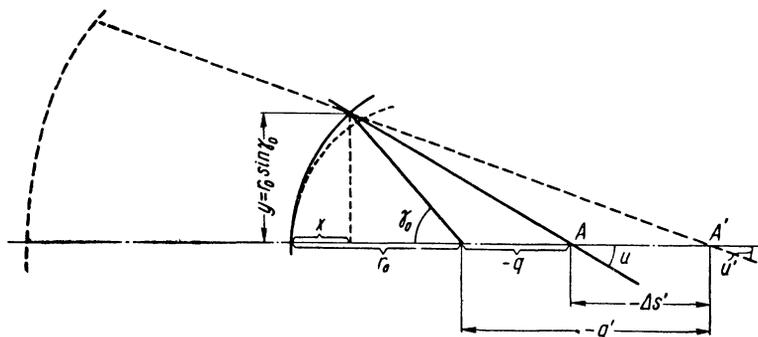


Рис. 36.

откуда легко определяется величина коэффициента B :

$$B = \frac{\sin u' - \sin u}{4 (\cos u' - \sqrt{n^2 - \sin^2 u}) y^3} \quad (499)$$

В том случае, если бы шла речь об уничтожении aberrаций пятого порядка, необходимо было бы принять для профиля поверхности уравнение параболы шестой степени. Тогда в формуле (499) в знаменателе вместо коэффициента 4 получили бы 6; кроме того, высота y вошла бы уже не в третьей, а в пятой степени.

Рассмотрим случай деформации сферической поверхности. Обратимся к рис. 36, где сплошной линией показана исходная сфера, пунктиром показан профиль деформированной поверхности и соответственный ход луча до и после деформации; r_0 — радиус исходной сферы; γ_0 — угол нормали к исходной сфере с осью системы; q и q' — расстояния от центра исходной сферы до точки пересечения падающего луча с осью и до заднего фокуса F'_0 .

Пользуясь рис. 36, напишем

$$y = r_0 \sin \gamma_0 = (r_0 - q - x) \operatorname{tg} u = (r_0 - q' - x) \operatorname{tg} u', \quad (500)$$

откуда

$$\frac{y}{\operatorname{tg} u} = r_0 - q - x \text{ и } \frac{y}{\operatorname{tg} u'} = r_0 - q' - x. \quad (501)$$

Составляя разность этих выражений, находим

$$y \left(\frac{1}{\operatorname{tg} u} - \frac{1}{\operatorname{tg} u'} \right) = q' - q = \Delta s' \quad (502)$$

— выражение, аналогичное формуле (491) для planoидной поверхности. Определяя из формулы (502) величину

$$y = \frac{\Delta s'}{\operatorname{ctg} u - \operatorname{ctg} u'} = r_0 \sin \gamma_0, \quad (503)$$

видим, что она допускает произвольность выбора величины радиуса r_0 кривизны исходной сферической поверхности, давая в том числе и значение $r_0 = \infty$, т. е. плоскую поверхность. Это обстоятельство в значительной степени упрощает использование сферических поверхностей для одновременного исправления сферической аберрации и соблюдения условия синусов. Иначе говоря, совместное исправление возможно в том случае, если высота на сферической поверхности удовлетворяет условию (503).

Следует отметить, что величина y принимает как положительные, так и отрицательные значения; это позволяет одновременно исправлять сферическую аберрацию и ошибки в выполнении условия синусов, независимо от того, какие знаки имела сферическая аберрация и отступление от условия синусов.

Совершенно очевидно, если условие (503) соблюдено, то поставленная задача сведется к исправлению одной лишь сферической аберрации.

Полученное условие было выведено для случая, когда деформируемая поверхность расположена непосредственно перед изображением, т. е. тогда, когда она являлась последней поверхностью системы. Однако практически для совместного исправления сферической аберрации и выполнения условия синусов можно было бы воспользоваться и какой-либо другой сферической поверхностью, расположенной внутри рассматриваемой оптической системы.

Построим в пространстве изображений меридиональные изображения точек преломления на поверхностях системы корригируемого апертурного луча через все последующие поверхности системы, после чего выберем в качестве деформируемой ту поверхность, для которой меридиональное изображение точки преломления на ней корригируемого луча имеет в пространстве изображений высоту y , найденную из условия (503). Такое изображение от точки преломления на одной из внутренних поверхностей системы представлено на

рис. 37, где сплошными линиями показан ход луча через систему до деформации на k -той преломляющей поверхности, пунктиром — ход луча после ее деформирования; N_k — точка преломления луча, N_k'' — изображение этой точки через все последующие поверхности; F' и F_0' — точки пересечения с осью некорректированного луча и задний фокус системы; $\Delta s'$ — продольная сферическая абберация; du' и du'' — углы между некорректированным и корректированным лучами после деформированной поверхности и после всей системы; y — требуемая высота точки излома выходящего из системы луча, обеспечивающая совместное исправление сферической абберации и отступление от условия синусов.

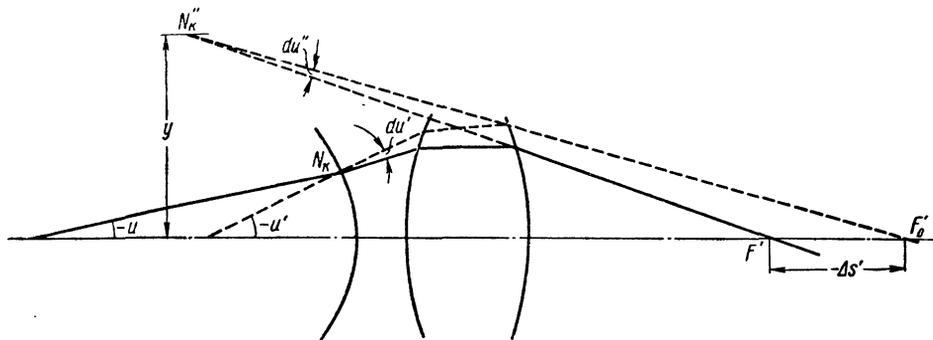


Рис. 37.

Для определения необходимой величины деформации поверхности можно было бы воспользоваться меридиональным угловым увеличением W_t в точках N_k и N_k'' , которое легко определяется при просчете близкого главного луча, исходящего из точки на k -той поверхности системы.

Само же определение величины деформации легко выполняется на основании дифференцирования формулы (32), см. § 2. При этом угол u перед деформируемой поверхностью должен быть постоянным.

Дифференцируя формулу (32), находим

$$\frac{d\gamma}{\cos^2 \gamma} = \frac{n' \cos u' du' (n' \cos u' - n \cos u) + (n' \sin u' - n \sin u) n' \sin u' du'}{(n' \cos u' - n \cos u)^2}. \quad (504)$$

Делая сокращения и пользуясь исходной формулой (32), формулу (504) приведем к следующему виду:

$$\frac{d\gamma}{\cos^2 \gamma} = \frac{\cos u' + \sin u' \operatorname{tg} \gamma}{n' \cos u' - n \cos u} n' du'. \quad (505)$$

Умножая обе части формулы на $\cos^2 \gamma$, получаем окончательно

$$d\gamma = \cos(u' - \gamma) \frac{n' \cos \gamma du'}{n' \cos u' - n \cos u}. \quad (506)$$

Имея в своем распоряжении величину угла $d\gamma$, для определения величины деформации поверхности воспользуемся формулой (462), см. § 20, выведенной для случая корригирования аберраций пятого порядка:

$$d\gamma = \operatorname{tg} \alpha = 6 \frac{\Delta r}{r\Phi}. \quad (507)$$

В случае же исправления сферической аберрации третьего порядка должны воспользоваться формулой

$$d\gamma = 4 \frac{\Delta r}{r\Phi}. \quad (508)$$

§ 23. Совместное исправление астигматизма и сферической аберрации

При рассмотрении вопроса о совместном исправлении астигматизма и сферической аберрации можем воспользоваться приемом, использованным в предыдущем параграфе. Остановимся на случае использования бесконечно тонкой коррекционной пластинки с planoидной поверхностью.

В § 19 главы VI была изучена работа planoидной поверхности и определены меридиональный и сагиттальный радиусы кривизны такой поверхности, а также вносимый ею астигматизм, о чем свидетельствуют формулы (438) и (443). Однако эти формулы выведены исходя из исправления высших порядков астигматизма. Если бы потребовалось корригировать астигматизм в области аберраций третьего порядка, то в этих формулах понадобилось бы изменить соответственные коэффициенты.

Действительно, исходя из уравнения параболы четвертой степени для профиля planoидной поверхности, должны были бы вместо формулы (432) записать

$$x = By^4, \quad (509)$$

и тогда величина тангенса угла γ выразится

$$\operatorname{tg} \gamma = 4By^3 = \frac{4x}{y}, \quad (510)$$

а величины радиусов r_s и r_t определятся следующим образом:

$$r_s = \frac{y}{\sin \gamma} = \frac{y^2}{4x \cos \gamma} = \frac{y^2}{4x} \quad (511)$$

и

$$r_t = \frac{1}{\cos^3 \gamma \frac{d^2 x}{dy^2}} = \frac{1}{12By^2 \cos^3 \gamma} \cong \frac{y^2}{12x} = \frac{r_s}{3}. \quad (512)$$

Перейдем к рассмотрению бесконечно тонкой пластинки со второй planoидной поверхностью. Для этого случая напишем

$$\frac{n_2 \cos^2 i'_1}{t'_1} = \frac{n_1 \cos^2 i_1}{t_1}; \quad \frac{n_2}{s'_1} = \frac{n_1}{s_1}, \quad (513)$$

Полагая, что x очень мало по отношению к отрезкам t'_1 и s'_1 , приравняем отрезки

$$t_2 = t'_1 \text{ и } s_2 = s'_1. \quad (514)$$

Тогда для второй planoидной поверхности получаем

$$\frac{n_3 \cos^2 i'_2}{t'_2} - \frac{n_2 \cos^2 i_2}{t^2} = \frac{n_3 \cos i'_2 - n_2 \cos i_2}{r_t} = (\cos i'_2 - n \cos i_2) \frac{12x}{y^2}. \quad (515)$$

и

$$\frac{n_3}{s'_2} - \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_3 \cos i'_2 - n_2 \cos i_2}{r_s} = (\cos i'_2 - n \cos i_2) \frac{4x}{y^2}. \quad (516)$$

Пренебрегая разностями между углами i_2 и i'_1 и i_1 и i'_2 и приравнивая эти углы к полевым углам β' и β , формулы (515) и (516) представим в следующем виде:

$$\frac{\cos^2 \beta}{t'_2} - \frac{\cos^2 \beta}{t_1} = (\cos \beta - n \cos \beta') \frac{12x}{y^2} \quad (517)$$

и

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_1} = (\cos \beta - n \cos \beta') \frac{4x}{y^2}. \quad (518)$$

Разделив формулу (517) на $\cos^2 \beta$, составим разности

$$\frac{1}{t'_2} - \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{t_1} + \frac{1}{s_1} = (\cos \beta - n \cos \beta') \left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1 \right) \frac{4x}{y^2}. \quad (519)$$

Если исходная астигматическая разность и астигматическая разность после коррекционной пластинки малы, то тогда, пренебрегая ошибками высшего порядка малости, можно принять, что

$$t'_2 = t_1 = s'_2 = s_1. \quad (520)$$

В этом случае формула (519) преобразуется:

$$- (t'_2 - s'_2) + (t_1 - s_1) = (\cos \beta - n \cos \beta') \left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1 \right) \frac{s^3}{y^2} 4x. \quad (521)$$

Свяжем величину s с положением коррекционной пластинки. Обращаясь к рис. 38, на котором представлено расположение коррекционной пластинки между выходным зрачком оптической системы и даваемым ею изображением, запишем следующие соотношения. Расстояние между выходным зрачком и изображением a равно сумме

расстояния d между выходным зрачком и коррекционной пластинкой и расстояния s'_0 от пластинки до изображения:

$$a = d + s'_0. \quad (522)$$

Величина ординаты y , на которой луч падает на коррекционную пластинку, равна произведению тангенса полевого угла на величину расстояния d :

$$y = -\operatorname{tg} \beta \cdot d. \quad (523)$$

Величина отрезка s вдоль главного луча, спроектированная на ось системы, мало отличается (при малой исправляемой кривизне поля) от величины отрезка s'_0 и может быть ей приравнена.

Таким образом, напишем

$$s \cos \beta = s'_0. \quad (524)$$

Возвратимся к формуле (521) и преобразуем множитель $\frac{s^2}{y^2} 4x$. Пользуясь уравнением профиля поверхности (509), исключим величину x . Тогда

$$4x \frac{s^2}{y^2} = 4Bs^2 y^2. \quad (525)$$

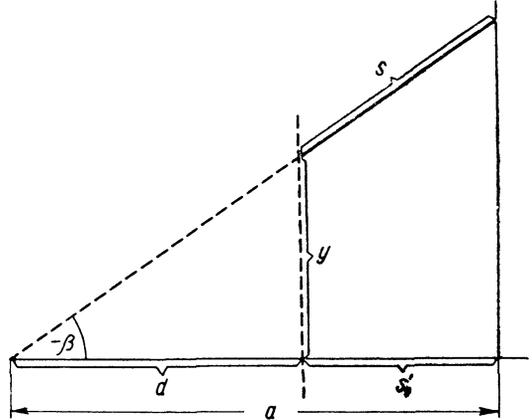


Рис. 38.

Используя уравнения (523) и (524), формулу (525) преобразуем:

$$4x \frac{s^2}{y^2} = 4B \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\cos^2 \beta} s'^2_0 d^2. \quad (526)$$

Величина d с помощью формулы (522) может быть выражена через расстояние между зрачком и плоскостью изображения:

$$4x \frac{s^2}{y^2} = 4B \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\cos^2 \beta} (a - s'_0)^2 s'^2_0, \quad (527)$$

и тогда формула (521) принимает вид:

$$\begin{aligned} - (t'_2 - s'_2) + (t_1 - s_1) &= (\cos \beta - n \cos \beta') \left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1 \right) \times \\ &\times 4B \frac{\operatorname{tg}^2 \beta \cdot s'^2_0}{\cos^2 \beta} (a - s'_0)^2. \end{aligned} \quad (528)$$

Полагая, что после введения деформированной поверхности астигматизм после коррекционной пластинки будет уничтожен и исходя из формулы (528), определим величину коэффициента B :

$$B = \frac{(t_1 - s_1) \cos^2 \beta}{4 (\cos \beta - n \cos \beta') \left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1 \right) \operatorname{tg}^2 \beta (a - s'_0)^2 s'^2_0}. \quad (529)$$

Формула (529) выведена исходя из задачи исправления астигматизма третьего порядка. Нетрудно получить аналогичную формулу для исправления астигматизма пятого порядка. Для этого в формуле (529) потребуется изменить лишь два коэффициента. В результате получим

$$C = \frac{(t_1 - s_1) \cos^2 \beta}{6 (\cos \beta - n \cos \beta') \left(\frac{5}{\cos^2 \beta} - 1 \right) \operatorname{tg}^2 \beta (a - s'_0)^2 s'_0{}^2} \cdot \quad (530)$$

Обработаем выражения для сферической aberrации. Обращаясь к рис. 39, на котором сплошной линией показан ход луча до его отклонения коррекционной пластинкой, а пунктиром — ход луча, приводимого пластинкой в точку изображения для нулевых лучей, свяжем величину сферической aberrации $\Delta s'$ с изменением апертурного угла $\Delta u''$ и величиной последнего отрезка s'_0 . Полагая апертурный угол некорригированного луча равным u и угол корригированного луча u'' , можем написать

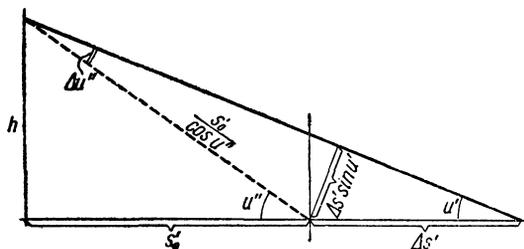


Рис. 39.

турный угол некорригированного луча равным u и угол корригированного луча u'' , можем написать

$$\Delta u'' = \frac{\Delta s' \sin u}{s'_0} \cos u''. \quad (531)$$

Из формулы (531) следует: если сферическая aberrация $\Delta s'$ мала, то и величина изменения апертурного угла $\Delta u''$ также мала. Поэтому, пренебрегая величинами высшего порядка малости, можно приравнять u и u'' ; таким образом, величину угла $\Delta u''$ представим в виде:

$$\Delta u'' = \frac{\Delta s' \sin u}{s'_0} \cos u. \quad (532)$$

Определим высоту h апертурного луча на planoидной поверхности. Согласно рис. 39, находим

$$h = s'_0 \operatorname{tg} u. \quad (533)$$

Пользуясь формулой (388), см. § 16, выразим величину Δu изменения апертурного угла через изменение угла γ . В соответствии с формулой (510) напишем

$$\Delta u = \left(1 - \frac{n \cos u'}{\cos u} \right) \gamma = \left(1 - \frac{n \cos u'}{\cos u} \right) \frac{4x}{h} \quad (534)$$

или, пользуясь уравнением профиля (509),

$$\Delta u = \left(1 - \frac{n \cos u'}{\cos u}\right) 4 B h^3. \quad (535)$$

Сопоставляя между собой формулы (535) и (532), находим

$$\frac{\Delta s'}{s'_0} \sin u \cos u = \left(1 - \frac{n \cos u'}{\cos u}\right) 4 B h^3, \quad (536)$$

откуда, заменяя величину h в соответствии с формулой (533), определим величину коэффициента B :

$$B = \frac{\Delta s' \cos u}{4 s_0'^4 \left(1 - \frac{n \cos^2 u'}{\cos u}\right) \operatorname{tg}^2 u}. \quad (537)$$

Имея в своем распоряжении два выражения для коэффициента B , полученные исходя из устранения астигматизма и сферической aberrации и независимо друг от друга, можно оба эти выражения приравнять. Таким образом, устанавливается зависимость между исправляемым астигматизмом и сферической aberrацией и расположением коррекционной пластинки относительно плоскости изображения:

$$\frac{(t_1 - s_1) \cos^2 \beta}{(\cos \beta - n \cos \beta') \left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1\right) (a - s_0')^2 \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{\Delta s' \cos^2 u}{s_0'^2 \left(1 - \frac{n \cos u'}{\cos u}\right) \operatorname{tg}^2 u}. \quad (538)$$

Все величины, входящие в формулу (538), кроме s_0' , являются постоянными и могут быть заданы. Исходя из этого, воспользуемся формулой (538) для нахождения величины s_0' . Составляя отношение разности $a - s_0'$ и s_0' , напомним

$$\left(\frac{a - s_0'}{s_0'}\right)^2 = \frac{t_1 - s_1}{\Delta s'} \cdot \frac{\cos^2 \beta}{\cos^3 u} \cdot \frac{(\cos u - n \cos u') \operatorname{tg}^2 u}{(\cos \beta - n \cos \beta') \left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1\right) \operatorname{tg}^2 \beta}, \quad (539)$$

откуда

$$\frac{a}{s_0'} - 1 = \frac{\cos \beta \operatorname{tg} u}{\cos u \operatorname{tg} \beta} \sqrt{\frac{t_1 - s_1}{\Delta s'} \left(\frac{\cos u - n \cos u'}{\cos \beta - n \cos \beta'}\right) \frac{1}{\left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1\right) \cos u}}. \quad (540)$$

Обращая внимание на то, что произведение разности отрезков $t_1 - s_1$ вдоль главного луча на косинус угла β даст разность величин x_t и x_s , обычно используемую для графического представления астигматизма, преобразуем формулу (540):

$$\frac{a}{s_0'} = 1 + \frac{\cos \beta \operatorname{tg} u}{\cos u \operatorname{tg} \beta} \sqrt{\frac{x_t - x_s}{\Delta s'} \left(\frac{\cos u - n \cos u'}{\cos \beta - n \cos \beta'}\right) \frac{\cos \beta}{\cos u (3 - \cos^2 \beta)}}. \quad (541)$$

откуда легко получим

$$s'_0 = \frac{a}{1 + \frac{\cos \beta \operatorname{tg} u}{\cos u \operatorname{tg} \beta} \sqrt{\frac{x_t - x_s}{\Delta s'} \left(\frac{\cos u - n \cos u'}{\cos \beta - n \cos \beta'} \right) \frac{\cos \beta}{\cos u (3 - \cos^2 \beta)}}}. \quad (542)$$

Исследуя формулу (542), видим, что в ней необходимо обеспечить положительность подкоренного выражения. Вместе с тем для соблюдения этого условия необходимо, чтобы величины астигматизма и сферической aberrации имели одинаковые знаки.

Определив из формулы (542) величину последнего отрезка, можно перейти к определению коэффициента B , используя любую из формул (537) или (529).

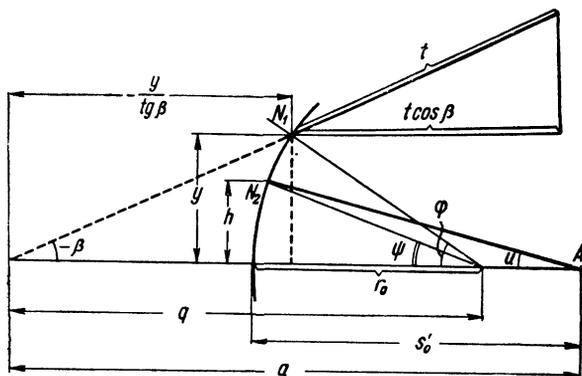


Рис. 40.

Рассмотрим вопрос о совместном исправлении астигматизма и сферической aberrации с помощью деформирования сферической поверхности. Сначала выведем некоторые закономерности, связывающие между собой ход главного и апертурного лучей.

Обратимся к рис. 40, на котором показан ход главного луча, пересекающего ось системы под углом β , и ход апертурного луча, составляющего с осью угол u , встречающихся на своем пути сферическую поверхность радиуса r_0 .

Расстояние между зрачком выхода и плоскостью изображения примем равным a ; углы нормалей, проведенных через точки N_1 и N_2 пересечения обоих лучей со сферой, обозначим φ и ψ ; высоты лучей соответственно y и h .

Из рис. 40 находим

$$a = -\frac{y}{\operatorname{tg} \beta} + t \cos \beta; \quad (543)$$

кроме того,

$$y = r_0 \sin \varphi, \quad h = r_0 \sin \psi. \quad (544)$$

Составив отношение формул (544), получаем

$$\frac{y}{h} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}. \quad (545)$$

Отрезок s'_0 от вершины поверхности до плоскости изображения выразим следующим образом:

$$s'_0 = t \cos \beta + r_0 (1 - \cos \varphi) = \frac{h}{\operatorname{tg} u} + r_0 (1 - \cos \psi). \quad (546)$$

Раскрывая в формуле (546) скобки и делая сокращения, находим

$$t \cos \beta - \frac{y}{\operatorname{tg} u} = r_0 (\cos \varphi - \cos \psi). \quad (547)$$

Заменяя величину $t \cos \beta$ из формулы (543), получаем

$$a + \frac{y}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{h}{\operatorname{tg} u} = r_0 (\cos \varphi - \cos \psi). \quad (548)$$

Деля формулу (548) на r_0 и пользуясь формулами (544), находим

$$\frac{a}{r_0} + \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{\sin \psi}{\operatorname{tg} u} = \cos \varphi - \cos \psi. \quad (549)$$

В формуле (549) известны все величины, кроме φ и ψ .

Обращаясь к q , определяющей собой положение центра сферы относительно центра зрачка, напишем

$$- \frac{y}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{y}{\operatorname{tg} \varphi} = q. \quad (550)$$

Деля формулу (550) на $r_0 = \frac{y}{\sin \varphi}$, получим

$$\frac{q}{r_0} = \cos \varphi - \frac{\sin \psi}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (551)$$

Выведенная ранее формула (502) представляет собой выражение для сферической абберации деформированной сферической поверхности. Заменяя в этой формуле y на h (для апертурного луча) и переходя к разностям апертурных углов u'' , u' и Δu до и после деформации поверхности, получаем

$$\Delta s' = \frac{h}{\sin^2 u'} \Delta u', \quad (552)$$

откуда

$$\Delta u' = \frac{\Delta s'}{h} \cdot u'. \quad (553)$$

Но величина угла отклонения луча может быть связана с углом поворота нормали согласно формуле (506):

$$\begin{aligned} d\gamma &= \operatorname{tg} \alpha = \cos(u' - \gamma) \frac{n' \cos \gamma \Delta u'}{n' \cos u' - n \cos u} = \\ &= \cos(u' - \gamma) \frac{n' \cos \gamma \sin^2 u'}{n' \cos u' - n \cos u} \cdot \frac{\Delta s'}{h}. \end{aligned} \quad (554)$$

С другой стороны, пользуясь формулой (544) и имея в виду, что $\gamma \approx \psi$, имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \cos(u' - \gamma) \frac{n' \sin^2 u'}{n' \cos u' - n \cos u} \cdot \frac{\Delta s'}{r_0 \operatorname{tg} \gamma}. \quad (555)$$

Но для тангенса γ имеется выражение (460), см. § 20. Пользуясь им, формулу (555) преобразуем:

$$C = \cos(u' - \gamma) \frac{n' \sin^2 u'}{n' \cos u' - n \cos u} \cdot \frac{\Delta s'}{6\psi^5 \operatorname{tg} \gamma}. \quad (556)$$

Однако угол γ мало отличается от угла ψ . Поэтому получим приближенную формулу:

$$C = \cos(u' - \psi) \frac{n' \sin^2 u'}{n' \cos u' - n \cos u} \cdot \frac{\Delta s'}{6\psi^6}. \quad (557)$$

Перейдем далее к определению коэффициента C исходя из условия уничтожения астигматизма. Обращаясь к формулам (479) и (481), см. § 20, напишем

$$\frac{\Delta t'}{t_0'^2} = (n' \cos i' - n \cos i) \frac{\Delta r_t - \Delta r}{n' r_0^2 \cos^2 i'} \quad (558)$$

и

$$\frac{\Delta s'}{s_0'^2} = (n' \cos i' - n \cos i) \frac{\Delta r_s - \Delta r}{n' r_0^2}. \quad (559)$$

Составив разность этих выражений, получаем

$$\frac{\Delta t'}{t_0'^2} - \frac{\Delta s'}{s_0'^2} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{n' r_0^2} \left(\frac{\Delta r_t - \Delta r}{\cos^2 i'} - \Delta r_s + \Delta r \right). \quad (560)$$

Для параболы шестой степени, согласно формулам (461), (466) и (472), см. § 20, получаем

$$\Delta r = C \varphi^6, \quad \Delta r_s = 6C \varphi^4, \quad \Delta r_t = 30C \varphi^4. \quad (561)$$

В отличие от предыдущего, когда величины разностей отрезков t_0' и s_0' не ограничивали, сделаем допущение, что эти отрезки мало отличаются друг от друга и их в формуле (560) можно приравнять друг другу. Точно так же сделаем допущение, что величины Δr настолько малы по отношению к Δr_s и Δr_t , что в формуле (560) их можно отбросить. Тогда формулу (560) представим в виде:

$$\frac{\Delta t' - \Delta s}{t_0'^2} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{n' r_0^2} \left(\frac{30}{\cos^2 i'} - \frac{\varphi^2}{\cos^2 i'} - 6 + \varphi^2 \right) C \varphi^4 \quad (562)$$

или, отбрасывая в скобках члены, содержащие φ^2 и умножая на величину $t_0'^2$,

$$\Delta t' - \Delta s' = \frac{t_0'^2}{n' r_0^2} (n' \cos i' - n \cos i) \left(\frac{30}{\cos^2 i'} - 6 \right) C \varphi^4. \quad (563)$$

Обусловим, что после деформации сферической поверхности астигматизм должен быть уничтожен. Тогда формула (563) принимает более простой вид:

$$-t'_0 + s'_0 = \frac{t_0'^2}{n' r_0^2} (n' \cos i' - n \cos i) \left(\frac{30}{\cos^2 i'} - 6 \right) C \varphi^4. \quad (564)$$

Но астигматическая разность вдоль луча может быть представлена как разность проекций $x_t - x_s$, деленная на косинус полого угла β . Таким образом, получаем

$$-\frac{x_t - x_s}{\cos \beta'} = \frac{t_0'^2}{n' r_0^2} (n' \cos i' - n \cos i) \left(\frac{3}{\cos^2 i'} - 6 \right) C \varphi^4. \quad (565)$$

Но в выражение (565) входят углы i и i' , величина которых связана как с величиной угла φ , так и с величиной радиуса r_0 , определяемого величиной q , и расположением поверхности. В силу этого необходимо преобразовать величины разности произведений из показателей преломления на косинусы углов преломления i и i' . Заменяя величины углов i' и i разностями углов β и γ , напишем

$$n' \cos i' - n \cos i = n' \cos (\beta' - \gamma) - n \cos (\beta - \gamma). \quad (566)$$

Развертывая выражения косинусов разностей и делая сокращения, получаем

$$n' \cos i' - n \cos i = (n' \cos \beta' - n \cos \beta) \cos \gamma. \quad (567)$$

Формула (567) весьма удобна тем, что входящие в нее величины углов β и β' постоянны, а угол γ может быть впоследствии приравнен углу φ . Пользуясь формулой (567), преобразуем формулу (565):

$$-\frac{x_t - x_s}{\cos \beta'} = \frac{t_0'^2}{n' r_0^2} (n' \cos \beta' - n \cos \beta) \left(\frac{30}{\cos^2 (\beta' - \varphi)} - 6 \right) \cos \varphi C \varphi^4, \quad (568)$$

откуда коэффициент

$$C = - \frac{n' (x_t - x_s) r_0^2}{t_0'^2 (n' \cos \beta' - n \cos \beta) \left(\frac{30}{\cos^2 (\beta' - \varphi)} - 6 \right) \cos \beta' \cdot \varphi^4 \cos \varphi}. \quad (569)$$

Ранее было получено выражение (557) для коэффициента C исходя из условия исправления сферической абберации. Приравнивая друг к другу оба выражения для коэффициента C и делая сокращения, получим

$$\begin{aligned} \frac{C}{n'} &= - \frac{(x_t - x_s) r_0^2}{t_0'^2 (n' \cos \beta' - n \cos \beta) \left(\frac{30}{\cos^2 (\beta' - \varphi)} - 6 \right) \cos \beta' \varphi^4 \cos \varphi} = \\ &= \cos (u' - \psi) \frac{\sin^2 u'}{n' \cos u' - n \cos u} \cdot \frac{\Delta s'}{6 \psi^6}. \end{aligned} \quad (570)$$

В формулу (570) входит выражение t'_0 . Ранее также было получено произведение величины t_0 на косинус угла β — формула (543). Пользуясь этой формулой для отрезка t'_0 и угла β' , исключим величину t'_0 из формулы (570), вследствие чего формула (570) преобразуется:

$$\frac{C}{n'} \frac{(x_t - x_s) \cos \beta'}{(n' \cos \beta' - n \cos \beta) \left(\frac{30}{\cos^2(\beta' - \varphi)} - 6 \right) \left(\frac{a}{r_0} + \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \beta'} \right)^2 \varphi^4 \cos \varphi} = \frac{\Delta s' \cos(u' - \psi) \sin^2 u'}{(n' \cos u' - n \cos u) 6\psi^6}. \quad (571)$$

Формулу (571) можно представить в несколько ином виде:

$$-\frac{x_t - x_s}{\Delta s'} = \left(\frac{n' \cos \beta' - n \cos \beta}{n' \cos u' - n \cos u} \right) \left(\frac{30}{\cos^2(\beta' - \varphi)} - 6 \right) \left(\frac{a}{r_0} + \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \beta'} \right)^2 \times \frac{\cos(u' - \psi)}{\cos \beta' \cdot 6\psi^6}. \quad (572)$$

Формула (572) в совокупности с формулой (549) составляет систему уравнений, решая которую найдем величины φ и ψ , определяющие положение деформируемой поверхности в соответствии с формулами (544) и (546). Пользуясь формулами, нетрудно получить выражение для отрезка s'_0 (между последней поверхностью системы и изображением):

$$s'_0 = \frac{r_0 \sin \psi}{\operatorname{tg} u'} + r_0 (1 - \cos \psi) = r_0 \left(1 + \frac{\sin \psi}{\operatorname{tg} u'} - \cos \psi \right). \quad (573)$$

Зная величину отрезка s'_0 и определив величину коэффициента C по одной из формул (557) или (569), будем иметь и положение, и форму профиля деформируемой поверхности.

Заметим, что это выведено из предположения, что профиль деформированной поверхности находится для устранения aberrаций высшего порядка. Если необходимо корригировать aberrации третьего порядка, в формулах (557) и (569) потребовалось бы изменить соответственные коэффициенты.

Совместное исправление двух aberrаций с помощью одной несферической поверхности рассматривалось лишь для частного случая, когда эта несферическая поверхность является последней поверхностью системы; в общем случае следовало бы рассмотреть расположение деформируемой поверхности внутри системы. Однако даже случай исправления двух aberrаций поверхностью, расположенной позади системы, приводит к довольно громоздким и не всегда удобным для решения формулам. Совершенно очевидно, что размещение корригирующей поверхности внутри системы сопряжено с еще большими сложностями. Поэтому удобнее в подобных случаях переходить к непосредственному просчету лучей, выбирая и расположение, и профиль поверхности в соответствии с исправляемыми aberrациями.

§ 24. Совместное исправление астигматизма и дисторсии

Совместное исправление астигматизма и дисторсии с помощью одной несферической поверхности несколько отличается от предшествующей задачи в том отношении, что и астигматизм, и дисторсия связаны с ходом одного и того же луча (подобно тому, как это было при совместном исправлении сферической аберрации и отступления от условия синусов).

Как и ранее, вначале рассмотрим исправление астигматизма и дисторсии с помощью коррекционной пластинки с деформированной поверхностью. Обратимся к § 16 главы V, где приведены формулы для определения величины дисторсии, вносимой деформированной поверхностью. Заменяя в этих формулах углы i и i' близкими им углами β и β' , запишем

$$\Delta y'' = - \left(1 - \frac{n \cos \beta'}{\cos \beta} \right) \left(\frac{s'_0 \gamma}{\cos^2 \beta} + x \operatorname{tg} \beta' \right). \quad (574)$$

Там же были получены формулы для сагиттальной и меридиональной кривизны (410) и (411); составляя разность этих формул и приравнявая (для уничтожения астигматизма после пластинки) величины t'_2 и s'_2 , напишем

$$-\frac{1}{t_1} + \frac{1}{s_1} = \left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1 \right) \frac{\cos \beta - n \cos \beta'}{r_s} = (\cos \beta - n \cos \beta') \times \\ \times \left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1 \right) 4By^2. \quad (575)$$

Преобразуем формулу (574). Пользуясь формулами (401) и (402), заменим в выражении (574) величины γ и x . Находим

$$\Delta y'' = - (\cos \beta - n \cos \beta') \left(\frac{s'_0 4By^3}{\cos^3 \beta} + By^4 \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\cos \beta} \right). \quad (576)$$

Далее, вынося за скобку величину By^4 , получим

$$\Delta y'' = - (\cos \beta - n \cos \beta') \left(\frac{4s'_0}{y \cos^3 \beta} + \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\cos \beta} \right) By^4. \quad (577)$$

Делая допущение, что величины t_1 и s_1 близки друг другу и в формуле (575) их разностью во второй степени можно пренебречь, напишем

$$\frac{t_1 - s_1}{t_1^2} = (\cos \beta - n \cos \beta') \left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1 \right) 4By^2. \quad (578)$$

Помня, что разность отрезков $t_1 - s$ может быть представлена как проекция астигматической разности $x_t - x_s$, деленная на косинус полевого угла β , формулу (578) представим в виде:

$$\frac{x_t - x_s}{t_1^2 \cos \beta} = (\cos \beta - n \cos \beta') \left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1 \right) 4By^2. \quad (579)$$

Деля формулу (579) на (577), получаем отношение

$$\frac{x_t - x_s}{\Delta y''} = - \frac{4 \left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1 \right) t_1^2 \cos^2 \beta}{\left(\frac{4s'_0}{y \cos^2 \beta} + \operatorname{tg} \beta' \right) y^2}. \quad (580)$$

Но произведение $t_1 \cos \beta$ есть не что иное, как отрезок от последней поверхности коррекционной пластинки до плоскости изображения, в силу чего формула (580) переписывается:

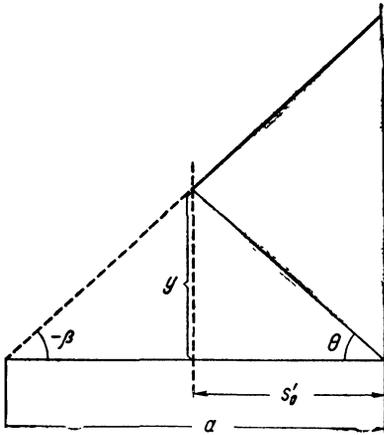


Рис. 41.

$$\frac{x_t - x_s}{\Delta y''} = - \frac{4 \left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1 \right) s_0'^2}{\left(\frac{4s'_0}{y \cos^2 \beta} + \operatorname{tg} \beta' \right) y^2}. \quad (581)$$

Обозначим отношение $y : s'_0$ через тангенс некоторого угла θ . Тогда формула (581) преобразуется:

$$\frac{x_t - x_s}{\Delta y''} = - \frac{4 \left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1 \right) \operatorname{cotg}^2 \theta}{\left(\frac{4 \operatorname{cotg} \theta}{\cos^2 \beta} + \operatorname{tg} \beta' \right)}. \quad (582)$$

Нетрудно видеть, что формулу (582) можно рассматривать как квадратное уравнение относительно котангенса угла θ .

Представим геометрическую интерпретацию угла θ . Обращаясь к рис. 41, где дана коррекционная пластинка с ординатой y , расположенная на расстоянии s'_0 от плоскости изображения, видим, что углом θ является угол, образуемый прямой, соединяющей центр изображения с точкой преломления луча на второй поверхности коррекционной пластинки.

Пользуясь рис. 41, нетрудно связать величины угла θ и полевого угла β . Действительно, деля y на тангенсы β и θ , получаем два отрезка, сумма которых равна расстоянию между зрачком и изображением:

$$a = \frac{y}{-\operatorname{tg} \beta} + \frac{y}{\operatorname{tg} \theta}, \quad (583)$$

откуда легко определяется величина

$$y = \frac{a}{-\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}}, \quad (584)$$

через которую и находим положение коррекционной пластинки относительно изображения.

Как и ранее, должны отметить, что полученные формулы выведены исходя из предложения, что исправлению подлежат астигматизм и дисторсия третьего порядка. В случае необходимости исправления aberrаций пятого порядка, естественно, понадобится изменить в полученных формулах соответственные коэффициенты.

Перейдем далее к рассмотрению совместного исправления дисторсии и астигматизма при деформации сферической поверхности.

Обратимся к рис. 42, где представлена деформируемая сферическая поверхность радиуса r_0 и ход преломленного ею луча, образующего с осью системы углы β и β' .

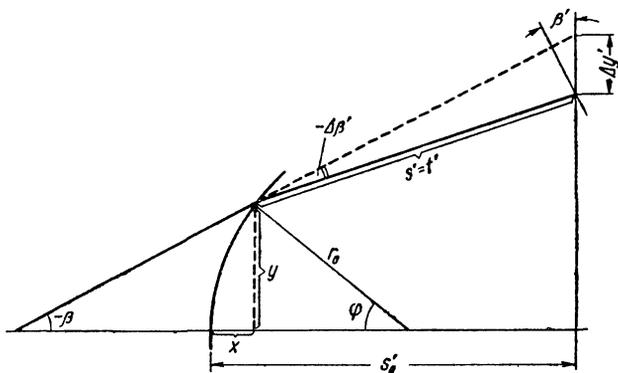


Рис. 42.

После деформации поверхности угол β' претерпит приращение $\Delta\beta'$, величина которого определит изменение дисторсии $\Delta y'$.

Пользуясь рис. 42, нетрудно установить зависимость между дисторсией и величиной приращения угла $\Delta\beta'$:

$$\Delta y' = -t' \frac{\Delta\beta'}{\cos \beta'}, \quad (585)$$

откуда

$$\Delta\beta' = -\frac{\Delta y' \cos \beta'}{t'}. \quad (586)$$

Ранее было получено выражение (506), связывающее изменение угла поворота нормали $\Delta\gamma$ с изменением $\Delta\beta'$ угла преломленного луча,

$$\Delta\gamma = \cos(\beta' - \gamma) \frac{n' \cos \gamma \Delta\beta'}{n' \cos \beta' - n \cos \beta}. \quad (587)$$

Заменив в формуле (587) значение угла $\Delta\beta'$ через изменение дисторсии согласно формуле (586), получаем

$$\Delta\gamma = -\cos(\beta' - \gamma) \frac{n' \cos \beta' \cos \gamma}{(n' \cos \beta' - n \cos \beta) t'} \cdot \Delta y' \quad (588)$$

Но величина $\Delta \gamma$ выражается с помощью формулы (460) см. § 20, через коэффициент C и угол φ . Поэтому напишем

$$\frac{6C}{r_0} \varphi^5 = -\cos(\beta' - \gamma) \frac{n' \cos \beta' \cos \gamma}{n' \cos \beta' - n \cos \beta} \cdot \frac{\Delta y'}{t'}. \quad (589)$$

С другой стороны, в соответствии с формулой (568), а также исходя из условия устранения астигматизма коэффициент C выразим следующим образом:

$$C = \frac{n' r_0^2 (x_t - x_s) \cos^2(\beta' - \varphi)}{t'^2 (n' \cos \beta' - n \cos \beta) [30 - 6 \cos^2(\beta' - \varphi)] \cos \beta' \varphi^4 \cos \varphi}. \quad (590)$$

Приравнивая друг другу оба выражения коэффициента C , представленные в формулах (589) и (590), после сокращений получим

$$\cos(\beta' - \gamma) \cos \beta' \cos \gamma \Delta y' = \frac{r_0 (x_t - x_s) \cos^2(\beta' - \varphi) \varphi}{t' \cos \beta' [5 - \cos^2(\beta' - \varphi)] \cos \varphi}. \quad (591)$$

Полагая, что угол γ мало отличается от угла φ , проведем дальнейшие сокращения; кроме того, из формулы (591) определим отношение астигматической разности $x_t - x_s$ к дисторсии Δy .

$$\frac{x_t - x_s}{\Delta y'} = \frac{t' \cos^2 \beta' [5 - \cos^2(\beta' - \varphi)] \cos^2 \varphi}{\varphi r_0 \cos(\beta' - \varphi)}. \quad (592)$$

Но, согласно формулам (543) и (544), отношение может быть выражено также формулой

$$\frac{t'}{r_0} \cos \beta' = \frac{a}{r_0} + \frac{y}{r_0 \operatorname{tg} \beta'}, \quad (593)$$

и поэтому формула (592) преобразуется:

$$\frac{x_t - x_s}{\Delta y'} = \left(\frac{a}{r_0} + \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \beta'} \right) \frac{5 - \cos^2(\beta' - \varphi)}{\varphi \cos(\beta' - \varphi)} \cos \beta' \cos^2 \varphi, \quad (594)$$

откуда

$$\frac{a}{r_0} = \frac{x_t - x_s}{\Delta y'} \cdot \frac{\varphi \cos(\beta' - \varphi)}{[5 - \cos^2(\beta' - \varphi)] \cos \beta' \cos^2 \varphi} - \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \beta'}, \quad (595)$$

$$r_0 = \frac{a}{\frac{x_t - x_s}{\Delta y'} \cdot \frac{\varphi \cos(\beta' - \varphi)}{[5 - \cos^2(\beta' - \varphi)] \cos \beta' \cos^2 \varphi} - \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \beta'}}. \quad (596)$$

Пренебрегая третьими степенями угла φ , формулу (596) представим таким образом:

$$r_0 = \frac{a}{\left\{ \frac{x_t - x_s}{\Delta y'} \cdot \frac{\cos(\beta' - \varphi)}{[5 - \cos^2(\beta' - \varphi)] \cos \beta' \cos^2 \varphi} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta'} \right\} \varphi}. \quad (597)$$

Зная величину радиуса r_0 , нетрудно определить и расположение деформируемой поверхности. Пользуясь формулой (546), находим величину последнего отрезка

$$s'_0 = t' \cos \beta' + r_0(1 - \cos \varphi). \quad (598)$$

Значение коэффициента C , определяющего степень деформации поверхности, определяют по любой из формул (589) или (590). Эти выводы справедливы для исправления астигматизма и дисторсии пятого порядка. В случае исправления астигматизма и дисторсии третьего порядка в формулах необходимо изменить соответствующие коэффициенты.

В более общем случае можно было бы разрешить задачу исправления дисторсии и астигматизма при помощи деформированной поверхности, размещенной внутри системы. Однако решение подобной задачи, видимо, более рационально осуществлять методом последовательного приближения на основе тригонометрического просчета лучей через рассчитываемую систему.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОФИЛЕЙ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 25. Общий интеграл несферической поверхности

До сих пор при определении профиля несферической поверхности исходили из того, чтобы обеспечить исправление аберраций для одного или нескольких лучей в корригируемом пучке.

Решение этой задачи обеспечивается при определении значения одного или нескольких коэффициентов в уравнении профиля несферической поверхности.

Вместе с тем можно поставить общую задачу уничтожения аберраций для всех лучей пучка одновременно.

Такое исправление аберраций для всех лучей пучка наблюдается, например, для сферической поверхности, когда предмет и изображение расположены в апланатических точках поверхности; отражательная параболическая поверхность второго порядка обеспечивает строгое уничтожение сферической аберрации для пучка лучей, параллельного оси системы; размещение зрачков выхода в геометрических фокусах кривых второго порядка обеспечивает строгое уничтожение астигматизма для бесконечно удаленного предмета и т. п.

Преломление лучей как через сферические, так и через несферические поверхности всегда будет связано с направлением нормалей к поверхности в точках преломления лучей рассматриваемого пучка; направления же нормалей зависят от значений производной профиля преломляющей поверхности. Поэтому определение профиля несферической поверхности, естественно, связывается с определением производной от профиля, что должно привести к некоторому дифференциальному уравнению. Перейдем непосредственно к выводам.

Предположим, что задана несферическая поверхность высшего порядка (рис. 43), разделяющая среды с показателями преломления n и n' . Примем ось абсцисс совпадающей с осью вращения поверхности; уравнение кривой зададим в полярной форме

$$R = R(\varphi), \quad (599)$$

где R — радиус-вектор; φ — аргумент — угол, составляемый радиусом-вектором с осью системы.

Падающий луч в точке A пересекает ось под углом β и образует в точке падения N на преломляющую несферическую поверхность угол i с нормалью к поверхности; угол нормали с осью системы обозначим γ . Преломленный луч образует соответственно углы β' и i' с осью и нормалью к поверхности. Угол между радиусом-вектором и падающим лучом обозначим ω , расстояние точки A от начала координат Δt , расстояние от вершины поверхности S до точки A обозначим s , расстояние от вершины поверхности до начала координат — R_0 .

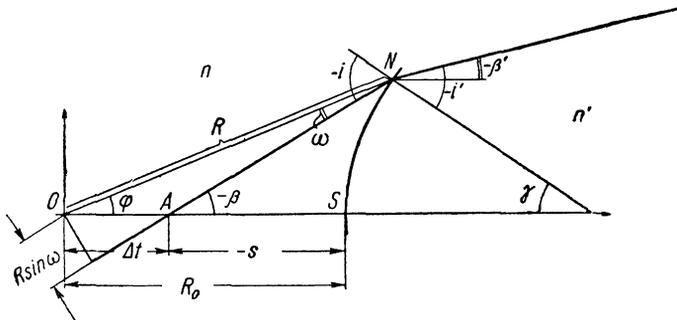


Рис. 43.

Обращаясь к формуле (20), см. § 2, напомним выражение для тангенса угла нормали к рассматриваемой поверхности

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dR}{d\varphi} \cos \varphi - R \sin \varphi}{\frac{dR}{d\varphi} \sin \varphi + R \cos \varphi} = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}, \quad (600)$$

откуда

$$\frac{dR}{d\varphi} \cos \varphi \cos \gamma - R \sin \varphi \cos \gamma = \frac{dR}{d\varphi} \sin \varphi \sin \gamma + R \cos \varphi \sin \gamma \quad (601)$$

или

$$\frac{dR}{d\varphi} \cos (\varphi + \gamma) = R \sin (\varphi + \gamma), \quad (602)$$

что дает

$$\frac{dR}{R} = \operatorname{tg} (\varphi + \gamma) d\varphi. \quad (603)$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находим

$$\ln R = \int \operatorname{tg} (\varphi + \gamma) d\varphi + C, \quad (604)$$

откуда

$$R = e^{\int \operatorname{tg} (\varphi + \gamma) d\varphi + C} \quad (605)$$

Постоянная интегрирования C определяется из условия равенства $\varphi = 0$:

$$R_0 = e^C \quad (606)$$

и, таким образом,

$$R = R_0 e^{\int \operatorname{tg}(\varphi + \gamma) d\varphi}. \quad (607)$$

Формула (607) и представляет собой уравнение профиля несферической поверхности в самом общем виде.

Из рис. 43 следует, что величина разности ω между углами β и φ определяется по формуле

$$R \sin \omega = -\Delta t \sin \beta. \quad (608)$$

В частном случае при равенстве величины Δt нулю (совпадение точки пересечения луча с осью с началом координат)

$$\sin \omega = 0, \quad -\beta = \varphi. \quad (609)$$

В соответствии с формулой (609) формулу (607) перепишем в следующем виде:

$$R = R_0 e^{\int \operatorname{tg}(\beta - \gamma) d\beta} = R_0 e^{\int \operatorname{tg} i d\beta}. \quad (610)$$

Используя известное выражение для тангенса угла γ [см. формулу (32) § 2], выражение (610) преобразуем:

$$R = R_0 e^{-\int \frac{\frac{n' \sin \beta' - n \sin \beta}{n' \cos \beta' - n \cos \beta} - \operatorname{tg} \beta}{\frac{n' \sin \beta' - n \sin \beta}{n' \cos \beta' - n \cos \beta} \operatorname{tg} \beta + 1} d\beta}. \quad (611)$$

Приступим к преобразованиям подинтегральной функции

$$f(\beta) = \frac{\frac{n' \sin \beta' - n \sin \beta}{n' \cos \beta' - n \cos \beta} - \operatorname{tg} \beta}{\frac{n' \sin \beta' - n \sin \beta}{n' \cos \beta' - n \cos \beta} \operatorname{tg} \beta + 1} = \frac{n' \left(\sin \beta' - \sin \beta \frac{\cos \beta'}{\cos \beta} \right) \cos \beta}{n' \sin \beta' \sin \beta - n + n' \cos \beta \cos \beta'}. \quad (612)$$

Деля числитель и знаменатель формулы (612) на произведение $n' \cos \beta \cos \beta'$, находим

$$f(\beta) = \frac{\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \beta' - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta'}}. \quad (613)$$

Заменив в формуле (611) подинтегральную функцию согласно формуле (613), получаем

$$R = R_0 e^{-\int \frac{(\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \beta) d\beta}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \beta' - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta'}}}. \quad (614)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Считая, что в формуле (614) угол β' равен нулю, тем самым можно выдвинуть требование, чтобы указанная несферическая поверхность преобразовала расходящийся из начала координат пучок лучей в пучок лучей, параллельных оси.

Формула (614) при этом примет вид:

$$R = R_0 e^{\int \frac{\operatorname{tg} \beta \, d\beta}{1 - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}}. \quad (615)$$

Умножив числитель и знаменатель подинтегральной функции в формуле (615) на $\cos \beta$, находим

$$R = R_0 e^{\int \frac{\sin \beta \, d\beta}{\cos \beta - \frac{n}{n'}}} = R_0 e^{-\int \frac{d\left(\cos \beta - \frac{n}{n'}\right)}{\cos \beta - \frac{n}{n'}}}. \quad (616)$$

Выполнив интегрирование, получаем

$$R = R_0 e^{-\ln\left(\cos \beta - \frac{n}{n'}\right) + \ln C}, \quad (617)$$

откуда

$$R = \frac{R_0 C}{\cos \beta - \frac{n}{n'}}. \quad (618)$$

Постоянную интегрирования C определим из условия равенства величин R и R_0 при равенстве угла β нулю:

$$C = 1 - \frac{n}{n'}, \quad (619)$$

и тогда формула (618) принимает вид:

$$R = R_0 \frac{1 - \frac{n}{n'}}{\cos \beta - \frac{n}{n'}} \quad (620)$$

или

$$R = R_0 \frac{n' - n}{n' \cos \beta - n}. \quad (621)$$

Зная величину R и угол β , нетрудно определить прямоугольные координаты y и x :

$$y = -R \sin \beta, \quad x = R \cos \beta. \quad (622)$$

На рис. 44 представлен ход луча, исходящего из начала координат и идущего параллельно оси после преломления на несферической поверхности.

Определим оптические длины хода вдоль преломленного луча, а также вдоль луча, совпадающего с осью системы.

Оптическая длина вдоль преломленного луча определится как сумма произведений из отрезка R на показатель преломления n и разности величин R_0 и x , умноженной на показатель преломления n' . Таким образом, напомним

$$\sum nl = nR + n'R_0 - n'R \cos \beta. \quad (623)$$

Для луча, идущего вдоль оси, оптическая длина хода равна

$$nl = nR_0. \quad (624)$$

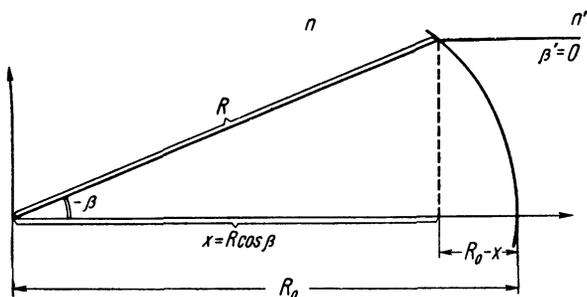


Рис. 44.

Но, согласно формуле (624), величина R выражается и через величину R_0 . В соответствии с этим формула (623) преобразуется:

$$-R_0(n' - n) + n'R_0 = nR_0, \quad (625)$$

что и приводит к равенству оптических длин для обоих лучей.

Как было ранее установлено (см. § 3, глава II), равенство оптических длин, известное под названием принципа Ферма, позволило определить профиль анаберрационной поверхности, выражаемый уравнением кривой второго порядка — эллипсом или гиперболой.

Только что полученный профиль кривой отличается от ранее рассмотренного лишь тем, что там начало координат предполагалось совмещенным с вершиной преломляющей поверхности и параллельный ход лучей имел место до преломления на несферической поверхности. Нетрудно видеть, что и в последнем рассмотренном случае также получаем для профиля поверхности кривую второго порядка. Пользуясь формулой (622), заменим в формуле (621) косинус угла β отношением абсциссы x к радиусу-вектору R :

$$R = R_0 \frac{n - n'}{n - \frac{x}{R} n'} \quad (626)$$

или

$$Rn - xn' = R_0(n - n'), \quad (627)$$

откуда

$$R^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} [n'x - R_0(n' - n)]^2, \quad (628)$$

Формула (628) и представляет собой уравнение второй степени.

Входящая в формулу (628) величина R_0 есть не что иное, как величина переднего фокусного расстояния поверхности — f ; поэтому величину R_0 выразим через радиус кривизны поверхности в ее вершине:

$$R_0 = -f = \frac{nr_0}{n - n'}, \quad (629)$$

и тогда формула (628) принимает вид:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} (n'x - nr_0)^2. \quad (630)$$

Перенесем начало координат в вершину кривой, для чего введем абсциссу x_1 ; новая абсцисса связана с абсциссой x следующей формулой:

$$x = x_1 + R_0. \quad (631)$$

В соответствии с этим формула (628) преобразуется:

$$y^2 = \left(\frac{n'^2}{n^2} - 1 \right) (x_1 + R_0)^2 - 2 \frac{(n' - n)}{n^2} n' R_0 (x_1 + R_0) + R_0^2 \frac{(n' - n)^2}{n^2}. \quad (632)$$

При переносе начала координат свободный член, не содержащий абсциссы x_1 , оказывается равным нулю. Поэтому, раскрыв в формуле (632) скобки и проведя сокращения, получим

$$y^2 = \left(\frac{n'^2}{n^2} - 1 \right) x_1^2 + 2 \left(\frac{n'^2}{n^2} - 1 \right) x_1 R_0 - 2 \frac{(n' - n)}{n^2} x_1 n' R_0 \quad (633)$$

или

$$y^2 = \left(\frac{n'^2}{n^2} - 1 \right) x_1^2 + 2 \frac{n' - n}{n} R_0 x_1. \quad (634)$$

Заменив радиус-вектор R_0 радиусом кривизны поверхности в ее вершине r_0 согласно формуле (629), находим окончательно

$$y^2 = -2r_0 x_1 + \frac{n'^2 - n^2}{n^2} x_1^2. \quad (635)$$

Полученная формула, как это нетрудно видеть, представляет собой не что иное, как ранее полученное выражение (59), см. § 3.

Рассмотрим далее кратность отношения между тангенсами углов β' и β . Этот случай может возникнуть при отсутствии дисторсии для первой поверхности объектива, работающей с угловым увеличением,

не равным единице, и при отсутствии после нее сферической аберрации в зрачке.

Таким образом, запишем

$$\operatorname{tg} \beta' = W \operatorname{tg} \beta. \quad (636)$$

Для данного частного случая формула (614) принимает вид:

$$R = R_0 e^{-\int \frac{(W-1) \operatorname{tg} \beta \, d\beta}{1 + W \operatorname{tg}^2 \beta - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \sqrt{1 + W^2 \operatorname{tg}^2 \beta}}}. \quad (637)$$

Пользуясь подстановкой

$$z = \operatorname{tg}^2 \beta, \quad (638)$$

интеграл в формуле (637), получив выражение

$$R = R_0 e^{-\frac{W-1}{2} \int \frac{dz}{\left(1 + Wz - \frac{n}{n'} \sqrt{1+z} \sqrt{1+W^2z}\right) (1+z)}}, \quad (639)$$

проинтегрируем в элементарных функциях.

Зададимся угловым увеличением $W = -1$ и отношением показателей преломления также равным минус единице. В этом случае формула (639) преобразуется:

$$R = R_0 e^{\frac{1}{2} \int \frac{d(z+1)}{z+1}}. \quad (640)$$

Выполнив интегрирование

$$R = R_0 e^{\frac{1}{2} \operatorname{lg} (z+1)}, \quad (641)$$

получаем

$$R = R_0 \sqrt{z+1} = R_0 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta + 1} = \frac{R_0}{\cos \beta}. \quad (642)$$

Формула (642) приводит к уравнению плоскости, заданной в полярных координатах, — плоскому зеркалу, перпендикулярному оси системы.

§ 26. Общий интеграл несферической поверхности при наличии сферической аберрации

Рассмотренный выше интеграл получен в предположении, что: а) все лучи, падавшие на несферическую поверхность, проходили через начало координат и б) сферическая аберрация в предметной точке отсутствовала. Однако практически такие условия имеются далеко не всегда. Наоборот, в подавляющем большинстве приходится встречаться с размещением несферической поверхности в сово-

купности с другими, обычно сферическими поверхностями, и поэтому изображение перед несферической поверхностью большей частью не будет гомоцентричным. В силу этого от принятого в предыдущем параграфе допущения о равенстве нулю величины Δt и угла ω вынуждены отказаться.

Такое допущение, однако, было принято после вывода формулы (607), поэтому в дальнейших выводах мы можем этой формулой воспользоваться.

Вместе с тем сделаем допущение, что сферическая aberrация Δt (например, сферическая aberrация в зрачке) и угол ω невелики и в силу этого можно пренебрегать их высшими степенями.

Возвратимся к рис. 43, откуда следует

$$\varphi = -\beta - \omega. \quad (643)$$

Используя эту формулу, преобразуем выражение общего интеграла несферической поверхности, представленное формулой (607):

$$R = R_0 e^{-\int \operatorname{tg}(\gamma - \beta - \omega) d(\beta + \omega)}. \quad (644)$$

Дифференцируя формулу (608), связывавшую между собой величину угла ω и величину сферической aberrации Δt , напомним

$$R \cos \omega d\omega = -\sin \beta d(\Delta t) - \Delta t \cos \beta d\beta. \quad (645)$$

Предполагая, что сферическая aberrация перед несферической поверхностью невелика и может быть представлена в виде сходящегося ряда по степеням тангенса угла β (в равной степени могли бы принять и разложение по степеням синуса угла β или по степеням самого угла β), имеем

$$\Delta t = C \operatorname{tg}^3 \beta + E \operatorname{tg}^5 \beta + \dots, \quad (646)$$

а также, ограничиваясь первым членом разложения

$$\Delta t = C \operatorname{tg}^3 \beta, \quad (647)$$

определим дифференциал от функции, выражающей сферическую aberrацию,

$$d(\Delta t) = 3C \operatorname{tg}^2 \beta \frac{d\beta}{\cos^2 \beta}. \quad (648)$$

Подставляя значение этого дифференциала в формулу (645), находим

$$R \cos \omega d\omega = -3C \operatorname{tg}^3 \beta \frac{d\beta}{\cos \beta} - C \operatorname{tg}^3 \beta \cos \beta d\beta \quad (649)$$

или

$$-d\omega = \left(\frac{3}{\cos \beta} + \cos \beta \right) \frac{\Delta t d\beta}{R \cos \omega}, \quad (650)$$

поэтому величина

$$d(\beta + \omega) = \left[1 - \left(\frac{3}{\cos \beta} + \cos \beta \right) \frac{\Delta t}{R \cos \omega} \right] d\beta \quad (651)$$

или приближенно, помня что величина сферической аберрации мала по отношению к радиусу-вектору,

$$d(\beta + \omega) \approx d\beta. \quad (652)$$

Преобразуем подинтегральную функцию. Находим

$$\operatorname{tg}(\gamma - \beta - \omega) = \frac{\operatorname{tg}(\gamma - \beta) - \operatorname{tg}\omega}{1 + \operatorname{tg}(\gamma - \beta)\operatorname{tg}\omega} \quad (653)$$

или приближенно

$$\operatorname{tg}(\gamma - \beta - \omega) = \operatorname{tg}(\gamma - \beta) - [1 + \operatorname{tg}^2(\gamma - \beta)]\operatorname{tg}\omega. \quad (654)$$

Ввиду малости угла ω приравняем его тангенс синусу:

$$\operatorname{tg}\omega = \omega = \sin\omega = -\frac{\Delta t}{R}\sin\beta, \quad (655)$$

и тогда формула (654) преобразуется:

$$\operatorname{tg}(\gamma - \beta - \omega) = \operatorname{tg}(\gamma - \beta) + [(1 + \operatorname{tg}^2(\gamma - \beta))\frac{\Delta t}{R}\sin\beta] \quad (656)$$

или

$$\operatorname{tg}(\gamma - \beta - \omega) = \operatorname{tg}(\gamma - \beta) + [1 + \operatorname{tg}^2(\gamma - \beta)]\frac{\Delta t \operatorname{tg}\beta}{R\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}}. \quad (657)$$

В соответствии с выражениями (656) и (652) формула (644) принимает следующий вид:

$$R = R_0 e^{-\int \operatorname{tg}(\gamma - \beta) d\beta - \int \frac{\Delta t}{R} [1 + \operatorname{tg}^2(\gamma - \beta)] \sin\beta d\beta} \quad (658)$$

или

$$R = R_0 e^{+\int \operatorname{tg}(\beta - \gamma) d\beta - \int \frac{\Delta t}{R} [1 + \operatorname{tg}^2(\beta - \gamma)] \sin\beta d\beta}. \quad (659)$$

Заменяв аналогично в формуле (657) синус угла β через его тангенс, деленный на корень квадратный из единицы плюс квадрат тангенса, находим

$$R = R_0 e^{\int \operatorname{tg}(\beta - \gamma) d\beta - \int \frac{\Delta t}{R} [1 + \operatorname{tg}^2(\beta - \gamma)] \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}} d\beta}. \quad (660)$$

Выражения вида $\operatorname{tg}(\beta - \gamma)$ преобразованы в виде формулы (613). В соответствии с этим формулу (660) представим в виде:

$$R = R_0 e^{-\int \frac{(\operatorname{tg}\beta' - \operatorname{tg}\beta) d\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\beta' - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta'}}} \times \\ \times e^{-\int \frac{\Delta t}{R} \left[1 + \frac{(\operatorname{tg}\beta' - \operatorname{tg}\beta)^2}{\left(1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\beta' - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta'} \right)^2} \right] \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}} d\beta}. \quad (661)$$

Формула (661) представляет собой общий интеграл несферической поверхности с учетом сферической аберрации перед нею.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что первый множитель, вошедший в эту формулу, уже входил в ранее выведенную формулу (614). Рассмотрим частный случай, когда после несферической поверхности пучок лучей должен идти параллельно оси системы. Как и ранее, угол β' должен быть равен нулю. Тогда формула (661) преобразуется:

$$R = R_0 e^{\int \frac{\operatorname{tg} \beta d\beta}{1 - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} - \int \frac{\Delta t}{R} \left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\left(1 - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}\right)^2} \right] \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} d\beta} \quad (662)$$

Но первый из этих двух интегралов уже был приведен к формуле

$$\int \frac{\operatorname{tg} \beta d\beta}{1 - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = -\ln \left(\cos \beta - \frac{n}{n'} \right) + \ln C, \quad (663)$$

откуда

$$e^{\int \frac{\operatorname{tg} \beta d\beta}{1 - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}} = \frac{C}{\cos \beta - \frac{n}{n'}}. \quad (664)$$

На основании этой формулы выражение (662) для радиуса-вектора R преобразуется:

$$R = \frac{R_0 C}{\cos \beta - \frac{n}{n'}} e^{-\int \frac{\Delta t}{R} \left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\left(1 - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}\right)^2} \right] \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} d\beta}. \quad (665)$$

Постоянная C определится из равенства $R = R_0$ при $\beta = 0$. В этом случае величина Δt также обращается в нуль и тогда

$$R_0 = \frac{R_0 C}{1 - \frac{n}{n'}}, \quad (666)$$

откуда

$$C = 1 - \frac{n}{n'}, \quad (667)$$

поэтому формула (665) переписывается таким образом:

$$R = R_0 \frac{1 - \frac{n}{n'}}{\cos \beta - \frac{n}{n'}} e^{-\int \frac{\Delta t}{R} \left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\left(1 - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}\right)^2} \right] \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} d\beta}. \quad (668)$$

Под знаком оставшегося интеграла находится искомая величина R . Однако затруднения, возникающие вследствие этого, устраняются

путем замены величины R под знаком интеграла ее приближенным значением, полученным из той же формулы (668).

Имея в виду, что величина сферической аберрации Δt принята малой и является множителем под знаком интеграла, приходим к выводу, что и сам интеграл вследствие этого должен быть малой величиной, поэтому множитель в формуле (668) оказывается близким к единице. Таким образом, в первом приближении величину R определим по известной уже формуле

$$R \cong R_0 \frac{1 - \frac{n}{n'}}{\cos \beta - \frac{n}{n'}}, \quad (669)$$

которая в данном случае является приближенной [ранее при $\Delta t = 0$ формула (620) являлась точной].

Подставляя это приближенное значение R в формулу (668) под знак интеграла, получаем

$$R = R_0 \frac{1 - \frac{n}{n'}}{\cos \beta - \frac{n}{n'}} \times \\ \times e^{-\frac{1}{R_0 \left(1 - \frac{n}{n'}\right)} \int \Delta t \left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\left(1 - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}\right)^2} \right] \frac{\left(\cos \beta - \frac{n}{n'}\right)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} \operatorname{tg} \beta d\beta} \quad (670)$$

В данном случае аналогично предыдущему величина R_0 представляет собой переднее фокусное расстояние для несферической поверхности $-f$. Вследствие этого воспользуемся формулой (629), откуда следует, что

$$R_0 \left(1 - \frac{n'}{n}\right) = r_0 \quad (671)$$

или

$$R_0 \left(\frac{n}{n'} - 1\right) = r_0 \frac{n}{n'}. \quad (672)$$

Формула (672) позволяет преобразовать выражение (670):

$$R = -\frac{nr_0 e}{n' \cos \beta - n} \frac{\frac{n'}{nr_0} \int \Delta t \left[1 + \frac{\sin^2 \beta}{\left(\cos \beta - \frac{n}{n'}\right)^2} \right] \left(\cos \beta - \frac{n}{n'}\right) \sin \beta d\beta}{}, \quad (673)$$

что дает

$$R = -\frac{nr_0 e}{n' \cos \beta - n} \frac{\frac{n'}{nr_0} \int \frac{\Delta t}{\cos \beta - \frac{n}{n'}} \left(1 - 2 \frac{n}{n'} \cos \beta + \frac{n^2}{n'^2}\right) \sin \beta d\beta}{}. \quad (674)$$

В формулу (674) входит величина сферической аберрации, ранее принятая в виде функции от степеней тангенса угла β . Эта функция

преобразуется в виде функции от косинуса угла β в соответствии с формулой

$$\Delta t = C \operatorname{tg}^3 \beta = \frac{C \sin^3 \beta}{\cos^3 \beta} = \frac{(1 - \cos^2 \beta) \sqrt{1 - \cos^2 \beta}}{\cos^3 \beta} C, \quad (675)$$

что позволяет, пользуясь подстановкой

$$z = \cos \beta, \quad (676)$$

привести интеграл (674) к алгебраической функции, интегрируемой в элементарных функциях.

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда отношение между углами β' и β непостоянно. Этот случай можно рассматривать как зависимость углового увеличения W от величины пологого угла β ; в первом приближении предположим, что изменения углового увеличения невелики и выражаются формулой

$$W = W_0 + \Delta W, \quad (677)$$

где W_0 — постоянная величина, равная угловому увеличению несферической поверхности в гауссовой области.

Обращаясь к формуле (637), увидим, что величина подинтегральной функции, обозначенная $F(\beta, W)$, изменяется при изменении величины W , и в первом приближении функция $F(\beta, W)$ получит некоторое приращение $\Delta F(\beta, W)$, величина которого выражается формулой

$$\Delta F(\beta, W_0) = F(\beta, W_0 + \Delta W) - F(\beta, W_0). \quad (678)$$

В соответствии с этим интеграл в формуле (637) примет вид:

$$R = R_0 e^{\int [F(\beta, W_0) + \Delta F(\beta, W_0)] d\beta} \quad (679)$$

или

$$R = R_0 e^{\int F(\beta) d\beta} e^{\int \Delta F(\beta) d\beta}. \quad (680)$$

При этом подинтегральные функции в формуле (680) представятся выражениями

$$F(\beta) = \frac{(1 - W_0) \operatorname{tg} \beta}{1 + W_0 \operatorname{tg}^2 \beta - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \sqrt{1 + W_0^2 \operatorname{tg}^2 \beta}} \quad (681)$$

и

$$\begin{aligned} \Delta F(\beta) &= \frac{dF(\beta)}{dW} \Delta W = \\ &= - \left[1 - \frac{(1 - W_0) \left(1 + \frac{n'}{n} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + W_0^2 \operatorname{tg}^2 \beta}} W_0 \right) \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + W_0 \operatorname{tg}^2 \beta - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \sqrt{1 + W_0^2 \operatorname{tg}^2 \beta}} \right] \times \\ &\quad \times \frac{\Delta W \operatorname{tg} \beta}{\left(1 + W_0 \operatorname{tg}^2 \beta - \frac{n}{n'} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \sqrt{1 + W_0^2 \operatorname{tg}^2 \beta} \right)}. \end{aligned} \quad (682)$$

Формулу (682) легко получим дифференцированием формулы (681) по параметру W .

Заметим, что выражение для первого из интегралов, входящих в формулу (680), уже было рассмотрено и приведено к виду, позволяющему осуществить интегрирование в элементарных функциях.

§ 27. Численное определение интегралов несферической поверхности

Частные случаи, рассмотренные в предыдущем параграфе, привели к довольно сложным выражениям интегралов, определяющих профиль несферической поверхности. Совершенно очевидно, что при практическом определении профиля рассчитываемой поверхности это представит известные затруднения.

Вместе с тем получать уравнения профиля несферической поверхности нередко необязательно. Для практических целей вполне возможно ограничиться определением профиля поверхности в виде ряда числовых значений координат точек этого профиля или, как говорят, заданием профиля поверхности в табличной форме.

В подобных случаях выгодно обратиться к исходным формулам для несферической поверхности, где фигурируют непосредственно углы φ или i .

Действительно, имея в своем распоряжении ряд значений углов β , определим заранее соответствующие им значения углов β' и, пользуясь известной формулой для угла γ нормали с осью системы, вычислим ряд значений углов γ .

В частном случае отсутствия сферической аберрации перед рассматриваемой несферической поверхностью приходим к равенству углов β и φ по абсолютной величине, и тогда очень нетрудно получить ряд значений углов i , тангенсы которых представляют собой подинтегральную функцию в формулах (610).

Вычисления ряда значений интеграла сводятся, как известно, к вычислению площадей, ограниченных подинтегральной кривой и осью абсцисс. Эти вычисления очень просты в тех случаях, когда интеграл, в котором производится определение площадей, разделен на равные доли, определяемые равными приращениями аргумента подинтегральной функции.

Совершенно очевидно, что при численном интегрировании можно широко пользоваться всеми методами, разработанными в математике для численного определения площадей, например формулой Симпсона. Тем не менее во многих случаях ограничимся использованием более простых формул, в частности формулы трапеций, в связи с тем, что производство вычислений при работе с формулой трапеций при последовательном определении множества точек искомого профиля поверхности будет значительно проще, а степень точности легко может быть обеспечена достаточно большим числом интервалов (что необходимо и для контроля за выполнением несферической поверхности), на которые разбивается интегрируемая площадь.

Рассмотрим процесс численного интегрирования более детально. Обратимся к рис. 45, где представлен ход подинтегральной функции $\text{tg } i$. Интегрируемая площадь разбита на k равных элементов. Ширина каждой элементарной полоски определяется по формуле

$$\Delta\beta = \frac{\beta_k - \beta_0}{k}, \quad (683)$$

где углы β_k и β_0 определяют собой верхний и нижний пределы интегрирования.

В рассматриваемом случае при $\beta = 0$ угол i также принимает значение, равное нулю.

Таким образом, запишем

$$\beta_0 = 0, \quad i_0 = 0. \quad (684)$$

В соответствии с этим формула (683) упрощается:

$$\Delta\beta = \frac{\beta_k}{k}, \quad (685)$$

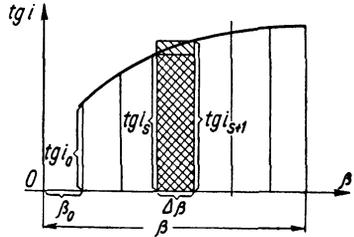


Рис. 45.

и тогда интеграл, являющийся показателем степени e в формуле (610), принимает вид:

$$\int_0^k \text{tg } i d\beta \cong \sum_0^k \text{tg } i \Delta\beta = \frac{\beta_k - \beta_0}{k} \sum_0^k \text{tg } i = \frac{\beta_k}{k} \sum_1^k \text{tg } i. \quad (686)$$

Формула (686) определяет интегрирование, выполненное по формуле прямоугольников.

Однако не составляет большого труда перейти от этой формулы к формуле трапеций. Величина элементарной трапеции определится полусуммой соседних ординат, умноженной на ширину интервала $\Delta\beta$. В этом случае получим следующее значение для интеграла

$$\int_0^k \text{tg } i d\beta = \frac{\beta}{k} \sum_0^{k-1} \frac{\text{tg } i_{s+1} + \text{tg } i_s}{2}. \quad (687)$$

Это выражение легко приводится к виду:

$$\int_0^k \text{tg } i d\beta = \frac{\beta}{k} \left(\sum_1^k \text{tg } i + \frac{\text{tg } i_0 + \text{tg } i_k}{2} \right) = \frac{\beta}{k} \left(\sum_1^k \text{tg } i - \frac{\text{tg } i_k}{2} \right). \quad (688)$$

Нетрудно определить и точность интегрирования. Обращаясь к рис. 46, на котором представлены два соседних элемента, ограниченных ординатами $\text{tg } i_{s-1}$, $\text{tg } i_s$ и $\text{tg } i_{s+1}$, определим величину

площади треугольника, образованного вершинами всех трех ординат. Величина площади треугольника выразится формулой

$$2\delta F = \left(-\frac{\operatorname{tg} i_{s+1} + \operatorname{tg} i_{s-1}}{2} + \operatorname{tg} i_s \right) \Delta\beta, \quad (689)$$

причем на каждый элемент интегрирования приходится половина этой площади.

Величина всей площади треугольника выразит главную часть ошибки, которая имела бы место при вдвое меньшем числе интервалов.

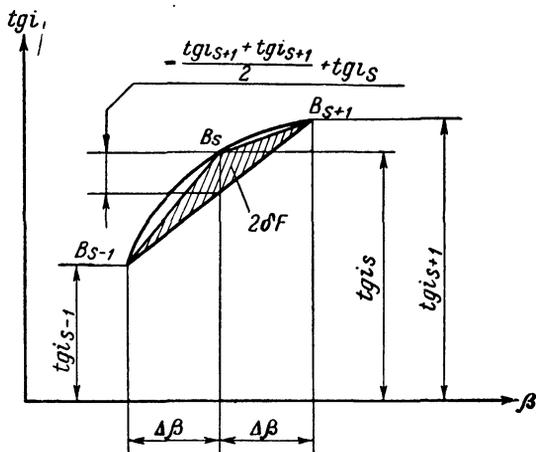


Рис. 46.

Поэтому, увеличив вдвое число интервалов, выявим главную часть ошибки, не учтенной при начальном числе интервалов. Совершенно очевидно, что такая проверка точности интегрирования возможна лишь на участке наиболее быстрого изменения подинтегральной функции.

Метод численного интегрирования позволяет определять координаты точек профиля несферической поверхности и при наличии сферической аберрации; однако в этом случае дело осложняется тем, что общий интервал интегрирования уже нельзя разбить на равные элементарные участки.

Обратимся к формуле (608). Зная сферическую аберрацию предыдущей части системы, можно считать величины Δt и β известными. Однако в левой части этой формулы — две неизвестные величины R и ω .

Вместе с тем для определения величины R по формуле (607) необходимо иметь значения аргумента φ , определение которых требует знания величин углов ω . Решение задачи осуществляется несколькими способами. Во-первых, можно первоначально выпол-

нить численное интегрирование, не учитывая сферической аберрации (приравнивая углы $-\beta$ и φ) и вслед за тем произвести вторичное интегрирование уже с учетом углов ω , используя для определения их значения соответственных радиусов-векторов, найденных без учета углов ω .

В случае необходимости этот процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута необходимая степень точности.

В качестве второго приема для приближенного определения углов ω используем в качестве приближенных значений радиусов-векторов значения таковых для предшествующих точек определяемого профиля, тем более, что значение начального радиуса-вектора R_0 всегда известно.

Второй прием значительно быстрее приведет к решению, так как при первоначальном определении численных значений радиусов-векторов используем значения малых углов ω , совершая при их определении ошибки высшего порядка малости.

§ 28. Просчет лучей в случае задания профиля несферической поверхности в табличной форме

Определение профиля несферической поверхности методом численного интегрирования, рассмотренное в предыдущем параграфе, решая задачу уничтожения какой-либо одной из аберраций системы, например сферической аберрации или дисторсии, оставляет открытым вопрос о других аберрациях оптической системы.

Вместе с тем всегда может возникнуть необходимость определения и других, некорригированных данной несферической поверхностью аберраций, хотя бы лишь для того, чтобы иметь возможность убедиться в их допустимости. Однако для суждения об этом будет необходимо определить ход лучей через несферическую поверхность, заданную в виде таблицы значений координат отдельных точек профиля поверхности. В том случае когда должны будем рассматривать ход пучка лучей, несовпадающего с корригированной поверхностью пучком, придется решать задачу просчета луча через поверхность, профиль которой задается в табличной форме.

Совершенно очевидно, что все ранее рассмотренные приемы просчета лучей через несферические поверхности (см. главу II) не смогут быть использованы для этой цели, так как до сих пор предполагалось, что уравнение профиля поверхности известно.

Приступая к решению подобной задачи, как и раньше, разделим ее на две части — определение точки встречи луча с поверхностью и определение радиусов кривизны в сагиттальной и меридиональной плоскостях.

Обратимся к рис. 47, где представлен профиль несферической поверхности с вершиной, расположенной в точке S .

Примем, что начало координат расположено в точке O на расстоянии R_0 от вершины поверхности. Пусть координаты двух каких-либо соседних точек профиля N_k и N_{k+1} будут соответственно x_k

и y_k и $x_k + \Delta x_k$ и $y_k + \Delta y_k$. Предположим также, что луч, ход которого через несферическую поверхность требуется определить, проходит через некоторую точку A , расположенную на расстоянии s от вершины поверхности s .

Угол этого луча с осью системы примем равным β и предположим, что он пересекает поверхность между точками N_k и N_{k+1} . Радиусы-векторы точек профиля обозначим R , углы их с осью — φ .

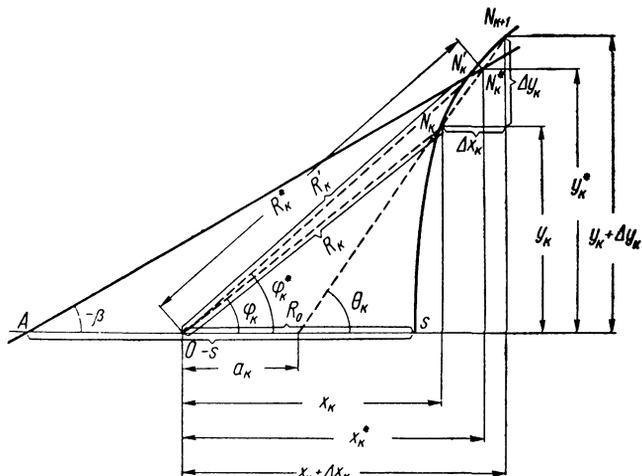


Рис. 47.

Проведем через точки N_k и N_{k+1} профиля поверхности секущую. Угол секущей с осью системы обозначим θ_k . Напишем уравнение секущей

$$y = (x - a_k) \operatorname{tg} \theta_k, \quad (690)$$

где a_k — расстояние точки пересечения секущей с осью абсцисс от начала координат.

Нетрудно определить величину тангенса угла θ_k . Из рис. 47 находим

$$\operatorname{tg} \theta_k = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}. \quad (691)$$

Предположим, что падающий луч пересечет секущую в некоторой точке N_k^* с координатами x_k^* и y_k^* . Определим эти координаты. Из того же рис. 47 находим

$$y_k^* = -(-s + x_k^* - R_0) \operatorname{tg} \beta = (x_k^* - a_k) \operatorname{tg} \theta_k. \quad (692)$$

Входящая в формулу (692) величина a_k может быть определена исходя из формулы (690):

$$a_k = x_k - \frac{y_k}{\operatorname{tg} \theta_k}. \quad (693)$$

Из формулы (692) следует

$$x_k^* (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \theta) = (s + R_0) \operatorname{tg} \beta + a_k \operatorname{tg} \theta_k, \quad (694)$$

откуда величина

$$x_k^* = \frac{(R_0 + s) \operatorname{tg} \beta + a_k \operatorname{tg} \theta_k}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \theta_k}. \quad (695)$$

Пользуясь формулой (690), определим y_k^* , а затем и некоторую величину R_k^* как расстояние от начала координат до точки N_k^*

$$R_k^* = \sqrt{y_k^{*2} + x_k^{*2}}. \quad (696)$$

Имея в распоряжении величину радиуса-вектора R_k^* , определим величину аргумента φ_k^* :

$$\sin \varphi_k^* = \frac{y_k^*}{R_k^*} \quad (697)$$

и, наконец, разность

$$\Delta \varphi_k^* = \varphi_k^* - \varphi_k, \quad (698)$$

с помощью которой, пользуясь общим интегралом профиля поверхности, найдем координаты некоторой новой точки профиля N_k' , которая расположена к точке пересечения луча значительно ближе, нежели исходные точки N_k и N_{k+1} .

Совершенно очевидно что, используя эту новую точку профиля N_k' в совокупности с одной из старых точек N_k или N_{k+1} , можно повторить все наши вычисления и путем последовательных приближений обеспечить требуемую точность определения точки встречи луча с преломляющей несферической поверхностью.

Рассмотрим определение координат точки N_k' более подробно. Напомним, что в общем случае координаты точек профиля поверхности определялись исходя из условия корригирования аберраций какого-то другого пучка лучей, например апертурного. Поэтому, имея в своем распоряжении угол φ_k^* , определяющий одну из полярных координат точки N_k' , должны для определения ее радиуса-вектора R_k' найти угол i_k^* . Однако в случае, если перед несферической поверхностью отсутствует сферическая аберрация и угол φ_k^* равен соответственному апертурному углу u_k^* , учитывая зависимость между углами u и u' , можно было бы, пользуясь формулой (32), см. § 2, найти угол γ и уже через этот угол и угол u_k^* вычислить угол i_k^* , так как он будет равен

$$i_k^* = u_k^* - \gamma = -\varphi_k^* - \gamma. \quad (699)$$

При наличии сферической аберрации, согласно формуле (643), углы φ и u будут связаны через дополнительный угол ω :

$$\varphi_k^* = -u_k^* - \omega_k \quad (700)$$

Угол ω связывается с углом u_k^* в соответствии с формулой (608):

$$\sin \omega = -\frac{\Delta s}{R} \sin u_k^*, \quad (701)$$

в которой величина R известна лишь приближенно.

Пользуясь формулами (700) и (701), исключим дополнительный угол ω . Определяя синус угла ω , напишем

$$-\sin \omega = \sin(\varphi_k^* + u_k^*) = \frac{\Delta s}{R} \sin u_k^* \quad (702)$$

или

$$\frac{\sin \varphi_k^*}{\operatorname{tg} u_k^*} + \cos \varphi_k^* = \frac{\Delta s}{R}, \quad (703)$$

откуда определим величину тангенса u_k^* :

$$\operatorname{tg} u_k^* = \frac{\sin \varphi_k^*}{\frac{\Delta s}{R} - \cos \varphi_k^*}, \quad (704)$$

Необходимо отметить, что формула (704) является приближенной, ибо величина R , как уже говорилось, известна приближенно.

Вместе с тем практически не снижая точности вычислений, можно пользоваться другим приближенным методом, значительно более простым. Рассматривая процесс численного интегрирования по способу трапеций, следует обратить внимание на то обстоятельство, что при выборе величины элементарных интервалов $\Delta\varphi$ (в общем случае углы β не равным углам φ) должна быть обеспечена необходимая точность вычислений при замене дуги кривой, соединявшей ординаты, ограничивавшие собой элементарную площадь, отрезком прямой.

Поэтому, используя часть данной элементарной площадки, ограниченной более узким элементарным интервалом, будем иметь дело с меньшим различием между истинной и приближенной элементарными площадями, что позволяет выполнить интегрирование по общей формуле (607) и в пределах каждого первоначального элемента интегрирования ограничиваться частью элементарной трапеции.

Таким образом, общий интеграл представим в следующем виде:

$$\int_0^{h^*} \operatorname{tg}(\varphi + \gamma) d\varphi = \int_0^h \operatorname{tg}(\varphi + \gamma) d\varphi + \operatorname{tg}(\varphi_h + \gamma_h) \cdot \Delta\varphi_k^* + \\ + \frac{1}{2} [\operatorname{tg}(\varphi_{k+1} + \gamma_{k+1}) - \operatorname{tg}(\varphi_k + \gamma_k)] \frac{\Delta\varphi_k^{*2}}{\Delta\varphi_k}. \quad (705)$$

В этих выражениях неизвестные величины производных $F''(y_0) \dots F^{(n)}(y_0)$ входят в первых степенях; остальные величины известны, так как h являются не чем иным, как разностями значений y :

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= y_1 - y_0 \\ h_2 &= y_2 - y_0 \\ h_k &= y_k - y_0 \end{aligned} \right\} . \quad (709)$$

Таким образом, приходим к системе k линейных уравнений, решая которые найдем все интересующие значения производных для точки с координатами $x = x_0$ и $y = y_0$.

В частности, для второй производной $x'' = F''(y_0)$ получаем

$$x''_0 = F''(y_0) = \left. \begin{aligned} &b_1 \dots a_{1k} \\ &b_2 \dots a_{2k} \\ &\dots \dots \dots \\ &b_k \dots a_{kk} \\ &a_{11} \dots a_{1k} \\ &a_{21} \dots a_{2k} \\ &\dots \dots \dots \\ &a_{k1} \dots a_{kk} \end{aligned} \right\} , \quad (710)$$

где коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= x_1 - x_0 - h_1 F'(y_0) \\ b_k &= x_k - x_0 - h_k F'(y_0) \end{aligned} \right\} \quad (711)$$

и

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{h_1^2}{2!} \\ a_{12} &= \frac{h_1^3}{3!} \\ &\dots \dots \dots \\ a_{1n-1} &= \frac{h_1^n}{n!} \end{aligned} \right\} . \quad (712)$$

Совершенно очевидно, что выражения, подобные формуле (710), можно написать и для любой другой точки профиля несферической поверхности. При этом всегда можно использовать любые интервалы между величинами y как по величине, так и по знаку. Вместе с тем совершенно необязательно использовать все точки профиля поверхности, ибо в таком случае пришлось бы иметь дело с решениями большого числа линейных уравнений.

Заметим, что в формулы коэффициентов a входят степени разностей величин h ; при разворачивании детерминантов это позволяет произвести некоторые сокращения.

§ 29. Дифференциальное уравнение для астигматизма несферической поверхности

Обратимся к сагиттальному и меридиональному инвариантам. Составив их отношение, получаем

$$\frac{\frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos^2 i}{t}}{\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s}} = \frac{r_s}{r_t}. \quad (713)$$

Выше (см. § 2 главы I) была получена формула (25), связывающая между собой величины сагиттального и меридионального радиусов кривизны. Пользуясь формулой (25), составим отношение этих двух радиусов:

$$\frac{r_s}{r_t} = - \frac{y^3 y''}{r_s^2}. \quad (714)$$

Но отношение сагиттального радиуса кривизны к ординате y , согласно формуле (24), равно величине квадратного корня из $1 + y'^2$. Поэтому формула (714) примет вид:

$$\frac{r_s}{r_t} = - \frac{y y''}{1 + y'^2}, \quad (715)$$

и тогда формула (713) получит выражение

$$\frac{\frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos^2 i}{t}}{\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s}} = - \frac{y y''}{1 + y'^2} = F(y), \quad (716)$$

откуда получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + y'^2 \frac{F(y)}{y} + \frac{F(y)}{y} = 0. \quad (717)$$

Рассмотрим несколько частных случаев. Полагая, что несферическая поверхность является в системе последней, а также считая, что после системы получим изображение, лежащее в бесконечности, придем к выводу о том, что отрезки s' и t' , равные между собой, должны быть равны бесконечности. В этом случае формула (716) принимает вид:

$$\frac{\frac{n \cos^2 i}{t}}{\frac{n}{s}} = \frac{s}{t} \cos^2 i = k \cos^2 i = F(y). \quad (718)$$

В случае если предмет лежит в бесконечности и после несферической поверхности уничтожается астигматизм, необходимо отрезки

t и s принять равными бесконечности, а отрезки t' и s' — равными друг другу.

В этом случае после сокращений формула (716) преобразуется:

$$F(y) = \cos^2 i'. \quad (719)$$

Функции $F(y)$ вправе придать различные значения. В частном случае

$$F(y) = \cos^2 i' = \frac{y'^2}{1+y'^2}, \quad (720)$$

тогда дифференциальное уравнение (717) принимает вид:

$$y' + \frac{y'^2}{y} = 0. \quad (721)$$

Пользуясь подстановкой

$$y'' = p = \frac{dy}{dx}, \quad (722)$$

для второй производной y'' получаем

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}. \quad (723)$$

Подставляя значение y'' из формулы (723) в формулу (721), понижаем порядок дифференциального уравнения и разделяем переменные. Находим

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}, \quad (724)$$

откуда после интегрирования имеем

$$\ln p = -\ln y + \ln C_1 \quad (725)$$

или

$$p = \frac{C_1}{y} = \frac{dy}{dx}. \quad (726)$$

Разделяя переменные

$$y dy = C_1 dx \quad (727)$$

и выполнив интегрирование, получаем

$$\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2. \quad (728)$$

В случае если начало координат совмещено с вершиной кривой, произвольная постоянная C_2 обратится в нуль; постоянную C_1

приравняем величине r_0 . Тогда формула (728) переходит в уравнение параболы второй степени

$$y^2 = 2r_0x, \quad (729)$$

и, таким образом, приходим к уже рассмотренному случаю в § 4.

Возвратимся к формуле (717). Пользуясь той же самой подстановкой $y' = p$, получаем

$$p \frac{dp}{dy} + (p^2 + 1) \frac{F(y)}{y} = 0. \quad (730)$$

Деля выражение (730) на $(p^2 + 1)$ и умножая на dy , легко разделяем переменные:

$$\frac{pdp}{p^2 + 1} = -\frac{F(y)}{y} dy. \quad (731)$$

Интегрируя формулу (731), получаем

$$\frac{1}{2} \ln(p^2 + 1) = -\int \frac{F(y)}{y} dy. \quad (732)$$

Это выражение представим в несколько ином виде:

$$p^2 + 1 = e^{-2 \int \frac{F(y)}{y} dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1. \quad (733)$$

Из формулы (733) нетрудно получить первую производную от y по x :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{e^{-2 \int \frac{F(y)}{y} dy} - 1}. \quad (734)$$

Нетрудно видеть, что в формуле (734) переменные легко разделяются. Поэтому, интегрируя ее после разделения переменных, получаем

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{e^{-2 \int \frac{F(y)}{y} dy} - 1}}. \quad (735)$$

Г Л А В А IX

ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ НЕСФЕРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

§ 30. Расчет апланатической системы из двух несферических поверхностей

Выше рассмотрены случаи, когда с помощью той или иной несферической поверхности можно было обеспечить исправление той или иной аберрации, а иногда даже двух аберраций, если обеспечивалось необходимое для этой цели расположение несферической поверхности в системе.

Однако в практике расчета оптических систем могут встретиться случаи, когда использование только одной несферической поверхности окажется недостаточным для решения поставленных задач. Одной из задач подобного рода является расчет апланатической системы из двух преломляющих или отражающих поверхностей, разделенных толщиной или воздушным промежутком конечной величины.

Ставя такую задачу и ограничиваясь требованием исправления сферической аберрации для нескольких апертурных углов или высот и исправлением ошибки против условия синусов для одного угла или для одной высоты, можно было бы ограничиться сочетанием одной сферической и одной несферической поверхности; однако в случае соблюдения условия синусов для всех тех углов, для которых будет исправлена сферическая аберрация, уже понадобятся две несферические поверхности.

В частности, можем принять, что предметная точка расположена в бесконечности; в этом случае входные апертурные углы окажутся равными нулю. На рис. 48 представлен ход луча через две несферические поверхности, вершины которых S_1 и S_2 расположены друг от друга на расстоянии d .

Апертурный луч N_1N_2F' пересекает первую поверхность в некоторой точке N_1 на высоте $h_1 = y_1 = y_1^*$ от оси системы; вторую

преломляющую поверхность луч пересекает в точке N_2 на расстоянии y_{II} от оси.

Абсциссами точек N_1 и N_2 в системах координат, начала которых совмещены с вершинами обеих поверхностей, являются x_I и x_{II} .

Точку пересечения апертурного луча с осью системы обозначим через F' (задний фокус системы). За показатели преломления сред, разделяемых обеими поверхностями, примем n_1 , n_2 и n_3 , фокусное расстояние системы возьмем равным f'_0 .

В соответствии с условием синусов напомним

$$h_1 = y_I = u_1^* = f'_0 \sin u', \quad (736)$$

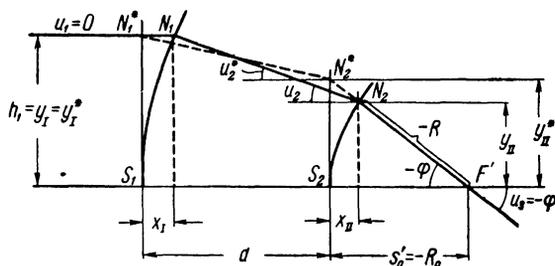


Рис. 48.

откуда сразу же определим величину выходного апертурного угла

$$\sin u' = \frac{h_1}{f'_0}. \quad (737)$$

Отрезок от вершины второй поверхности до заднего фокуса обозначим s'_0 .

В первом приближении примем, что преломление луча происходит не на несферических поверхностях, а на плоскостях, касательных к вершинам несферических поверхностей в некоторых точках N_1^* и N_2^* , отстоящих от оси системы на расстояниях, равных y_I^* и y_{II}^* . Ход такого фиктивного луча представлен на рис. 48 пунктиром. Обозначим для этого фиктивного луча величину угла, составляемого им с осью системы, через u_2^* . Этот угол нетрудно определить по формуле

$$\operatorname{tg} u_2^* = \frac{y_I - y_{II}}{d}. \quad (738)$$

Имея в своем распоряжении величины углов $u_1 = 0$, u_2^* и u_3 , определим значения углов γ нормалей к обеим несферическим поверхностям, исходя из формулы (32) см. § 2 главы I.

Согласно этой формуле напишем

$$\operatorname{tg} \gamma_I = \frac{n_2 \sin u_2^*}{n_2 \cos u_2^* - n_1} \quad (739)$$

и

$$\operatorname{tg} \gamma_{II} = \frac{n_3 \sin u_3 - n_2 \sin u_2^*}{n_3 \cos u_3 - n_2 \cos u_2^*}. \quad (740)$$

Если через данную систему задан ход нескольких лучей, то, пользуясь ранее выведенными формулами, для всех этих лучей найдем ряд значений углов нормалей с осью системы. Задавая профили обеих поверхностей в виде уравнений

$$x_I = A_I y_I^2 + B_I y_I^4 + C_I y_I^6 + \dots \quad (741)$$

и

$$x_{II} = A_{II} y_{II}^2 + B_{II} y_{II}^4 + C_{II} y_{II}^6 + \dots \quad (742)$$

и дифференцируя полученные формулы, находим величины тангенсов углов γ_I и γ_{II} :

$$\operatorname{tg} \gamma_I = \frac{dx_I}{dy_I} = 2A_I y_I + 4B_I y_I^3 + 6C_I y_I^5 + \dots, \quad (743)$$

$$\operatorname{tg} \gamma_{II} = \frac{dx_{II}}{dy_{II}} = 2A_{II} y_{II} + 4B_{II} y_{II}^3 + 6C_{II} y_{II}^5 + \dots. \quad (744)$$

Заметим, что входящие в формулы (741)—(744) коэффициенты A_I и A_{II} представляют собой не что иное, как обратные величины удвоенных радиусов кривизны обеих поверхностей в их вершинах

$$\left. \begin{aligned} A_I &= \frac{1}{2r_1} \\ A_{II} &= \frac{1}{2r_2} \end{aligned} \right\}. \quad (745)$$

Совершенно очевидно, что величины обоих радиусов вполне определяются заданием фокусного расстояния системы и ее последнего отрезка s'_0 .

В силу этого в формулах (743) и (744) неизвестными являются величины коэффициентов, начиная с коэффициентов B и выше. Левые части уравнений (743) и (744) (в первом приближении) приравняем к уже найденным величинам тангенсов углов γ_I и γ_{II} в соответствии с формулами (739) и (740). Каждый луч, для которого устраняем сферическую аберрацию и отступление от условия синусов, даст по два уравнения (743) и (744). Поэтому, задаваясь корригированием k лучей, определим k коэффициентов для каждой из преломляющих поверхностей, начиная с коэффициентов B .

Нетрудно видеть, что определение этих коэффициентов сведется к решению системы линейных уравнений.

Получив в результате этого решения коэффициенты B , C и т. д., введем их в уравнения (741) и (742), определим с их помощью k значений величин x и, таким образом, перейдем к некоторым новым профилям несферических поверхностей, более близким к истинному профилю, нежели исходные прямые, перпендикулярные оси системы. На этих новых профилях нетрудно определить высоты входящего и выходящего из системы лучей. Высота y_{II} на второй преломляющей поверхности (см. рис. 48) может быть определена по формуле

$$y_{II} = (s'_0 - x_{II}) \operatorname{tg} u_3. \quad (746)$$

Величина высоты y_I на первой преломляющей поверхности сохранится неизменной.

Таким образом, получены более точные значения координат точек пересечения корригируемых лучей с обеими поверхностями системы, что позволит уточнить величину угла u_2 . Для этой цели, исходя из рис. 48, получим уточненную формулу для тангенса угла:

$$\operatorname{tg} u_2 = \frac{y_I - y_{II}}{d - x_I + x_{II}}. \quad (747)$$

Определив из этой формулы значение угла u_2 , вернемся к формулам (739) и (740), заменив в них этим значением прежние значения углов u_2^* ; в результате получим более точные значения углов γ_I и γ_{II} .

Далее, используя уточненные значения углов γ_I и γ_{II} и высот y_{II} (высоты y_I сохраняются неизменными!), получим уже второе приближение для величин x и т. д. и прервем этот процесс последовательных приближений в тот момент, когда будет достигнута требуемая точность определения координат.

Небезынтересно, что, действуя подобным образом, при каждом новом определении величин x_{II} и y_{II} будем обходить истинную точку преломления на второй поверхности, приближаясь к ней как бы по спирали.

§ 31. Расчет апланатической системы из двух несферических поверхностей, разделенных промежуточной системой

Задача создания апланатической системы с помощью двух несферических поверхностей может быть расширена на тот случай, если между этими поверхностями будет введена какая-либо промежуточная система.

Совершенно очевидно, что в данном более общем случае воспользоваться формулами (738) или (747) для определения промежуточного угла u_2 нельзя, так как промежуточная система создаст

какую-то разность между апертурным углом после первой несферической поверхности и апертурным углом перед второй несферической поверхностью. Вследствие этого вынуждены будем обратиться к другому способу определения углов u_2 и углов u_k .

На рис. 49 представлен ход луча через две несферические поверхности с вершинами S_1 и S_k и промежуточную систему с поверхностями, вершины которых будут расположены в точках S_2, \dots, S_{k-1} .

Первоначально разместим на месте будущих несферических поверхностей две сферы, радиусы кривизны которых соответствуют радиусам кривизны в вершинах этих несферических поверхностей.

Определив, таким образом, в первом приближении оптическую систему, просчитаем через нее апертурный луч в прямом ходе. Обозначим для этого апертурного луча величины всех апертурных уг-

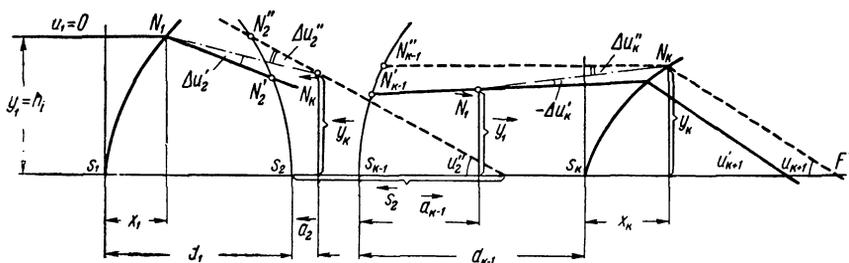


Рис. 49.

лов с индексом ' (штрих) вверх. Вместе с тем для выбранной высоты h_1 входа апертурного луча, пользуясь условием синусов, найдем величину выходного апертурного луча u_{k+1} , которую, в отличие от u_{k+1} , обозначим без индекса. Принимая u_{k+1} за начальный угол луча, входящего в систему в обратном направлении через задний фокус системы F' , просчитаем ход этого луча как через последнюю k поверхность, так и через всю промежуточную систему; все углы этого луча и его точки пересечения с поверхностями обозначим двойными индексами'' вверх. На рис. 49 этот луч, в отличие от луча, идущего в прямом ходе, показан пунктирной линией.

Рассматривая первый апертурный луч, идущий в прямом ходе, как некоторый главный луч, примем в качестве предметной точки на нем точку N_1 пересечения его с первой преломляющей поверхностью.

Пользуясь обычными формулами для меридионального пучка, получим после $k - 1$ поверхности на этом же главном луче меридиональное изображение точки N_1 , которое обозначим через \bar{N}_1 .

Соединяя точку \bar{N}_1 с N_k , в которой луч, идущий в обратном ходе, встречает k поверхность, прямой линией, образуем углы $\Delta u_k'$ и $\Delta u_k''$ между этой линией и лучами, идущими в прямом и обратном ходе.

С помощью этих углов получим приближенное значение угла u_k , вычисляемое по одной из формул

$$u_k = u'_k + \Delta u'_k = u''_k + \Delta u''_k. \quad (748)$$

Аналогично, рассматривая луч, идущий в обратном ходе, как главный луч и принимая на нем в качестве предметной точку N_k , находим ее меридиональное изображение, которое обозначим через \bar{N}_k .

Соединив точку \bar{N}_k с точкой N_1 , образуем углы $\Delta u'_2$ и $\Delta u''_2$, с помощью которых найдем приближенное значение угла u_2 :

$$u_2 = u'_2 + \Delta u'_2 = u''_2 + \Delta u''_2. \quad (749)$$

Имея в своем распоряжении ординаты \vec{y}_1 и \vec{y}_k точек \bar{N}_1 и \bar{N}_k и расположение этих точек относительно вершин S_2 и S_{k-1} поверхностей, определим тангенсы углов u_2 и u_k :

$$\operatorname{tg} u_2 = \frac{y_1 - \vec{y}_k}{d_1 + \vec{a}_2 - x_1} \quad (750)$$

и

$$\operatorname{tg} u_k = \frac{\vec{y}_1 - y_k}{d_{k-1} - \vec{a}_{k-1} + x_k}, \quad (751)$$

Далее, пользуясь формулой (32), см. § 2, вычислим приближенные значения тангенсов углов γ нормалей обеих несферических поверхностей с осью системы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_1 &= \frac{n_2 \sin u_2}{n_2 \cos u_2 - n_1} \\ \operatorname{tg} \gamma_k &= \frac{n_{k+1} \sin u_{k+1} - n_k \sin u_k}{n_{k+1} \cos u_{k+1} - n_k \cos u_k} \end{aligned} \right\}. \quad (752)$$

Если профили обеих несферических поверхностей заданы уравнениями

$$x_1 = A_I y_1^2 + B_I y_1^4 + C_I y_1^6 + \dots, \quad (753)$$

$$x_k = A_k y_k^2 + B_k y_k^4 + C_k y_k^6 + \dots, \quad (754)$$

то после дифференцирования можно получить выражения тангенсов углов γ_1 и γ_k :

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{dx_I}{dy_I} = 2A_I y_1 + 4B_I y_1^3 + 6C_I y_1^5 + \dots, \quad (755)$$

и

$$\operatorname{tg} \gamma_k = \frac{dx_k}{dy_k} = 2A_k y_k + 4B_k y_k^3 + 6C_k y_k^5 + \dots. \quad (756)$$

Приравнивая в формулах (755) и (756) значения тангенсов углов γ_1 и γ_k их приближенным значениям, полученным в формулах (750) и (751), получаем для нескольких апертурных углов две системы линейных уравнений относительно коэффициентов B , C и т. д. (коэффициенты A , как и ранее, можем считать известными, ибо они будут равны обратным величинам удвоенных радиусов кривизны в вершинах обеих кривых), решая которые и найдем ряд значений этих коэффициентов.

Возвращаясь к формулам (753) и (754), получаем возможность уточнить значения величин x_1 и x_k , что позволяет произвести уточнения величин углов u_2 и u_k . Совершенно очевидно, что для уточнения величины угла u_k нам понадобится предварительно уточнить значение y_k по формуле

$$y_k = (s'_0 - x_k) \operatorname{tg} u_{k+1}, \quad (757)$$

аналогичной формуле (746).

Выполнив ряд уточнений величин u_2 , u_k , x_1 , x_k и y_k путем последовательных приближений, обеспечим необходимую точность вычислений и завершим этот процесс.

Необходимо заметить, что наличие промежуточной системы требует в процессе каждого уточнения просчета прямого и обратного апертурных лучей и меридиональных пучков к ним. Стремясь уменьшить объем вычислений, определим величины фокусных расстояний для промежуточной системы вдоль каждого из апертурных лучей и будем пользоваться этими фокусными расстояниями при определении координат на обоих профилях несферических поверхностей. Однако этот прием при завершении процесса требует контрольной проверки.

§ 32. Расчет оптической системы, составленной из двух несферических поверхностей с одновременным исправлением астигматизма и сферической аберрации

Решение задачи одновременного исправления астигматизма и сферической аберрации в некоторых частных случаях может быть сведено к решению отдельного исправления астигматизма и сферической аберрации с помощью несферических поверхностей. К подобным частным случаям можно отнести размещение одной из несферических поверхностей в центре зрачка входа или зрачка выхода оптической системы.

В качестве одного из таких примеров приведем зеркальную систему Шмидта, в которой вторая поверхность, обеспечивающая исправление астигматизма, имеет даже сферическую форму. В равной степени можно привести в качестве второго примера совокупность из поверхности второго порядка (эллипс, гипербола или парабола), служащей для исправления астигматизма, и planoидной поверхности, размещенной в зрачке входа (или выхода) и обеспечивающей

исправление сферической aberrации. Не останавливаясь, однако, на рассмотрении этих примеров, перейдем к разбору общей задачи — случая, когда ни одна из поверхностей не совмещается со зрачком входа или выхода.

Обратимся к рис. 50, где представлена оптическая система, состоящая из двух поверхностей с вершинами S_1 и S_2 и зрачком входа, центр которого расположен в некоторой точке C , на расстоянии t_0 от вершины S_1 первой преломляющей поверхности.

Расстояние между обоими поверхностями примем равным d ; радиусы обеих поверхностей в их вершинах обозначим r_{01} и r_{02} .

Показатели преломления сред обозначим через n_1 , n_2 и n_3 . Все величины, относящиеся к апертурному лучу, — ординаты y и абс-

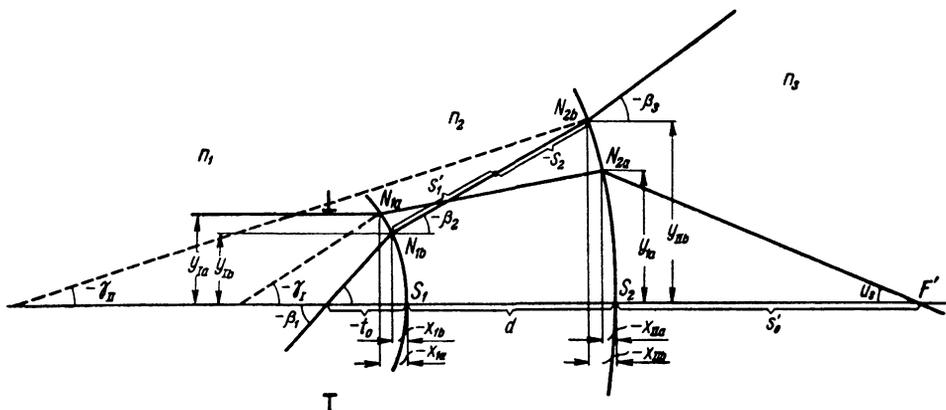


Рис. 50.

циссы x точек пересечения N этого луча с обеими преломляющими поверхностями, углы нормалей γ обозначим индексом a внизу; те же величины, относящиеся к главному лучу, обозначим индексами b внизу.

Ход главных лучей удобно задавать, пользуясь координатами точек N_{Ib} на первой поверхности. Таким образом, тангенсы углов β_1 определяются по формуле

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{y_{Ib}}{t_0 - x_{Ib}}. \quad (758)$$

Ход апертурных лучей удобно задавать в обратном ходе, используя последний отрезок s'_0 , величина которого вполне определяется значениями показателей преломления, радиусов r_{01} и r_{02} и толщины d . Тогда величины тангенсов выходных апертурных углов u_3 определяются с помощью формулы

$$\operatorname{tg} u_3 = \frac{y_{IIa}}{s'_0 - x_{IIa}}. \quad (759)$$

Решение поставленной задачи удобно построить следующим образом. Первоначально примем обе поверхности сферическими; далее, задаваясь величинами y_{Ia} или x_{Ia} , определим углы u_3 и сделаем просчет ряда апертурных лучей в обратном ходе, в результате чего определим величину угла u_2 и высоту y_{Ia} на первой поверхности названной системы.

Полагая, что профиль первой несферической поверхности задан уравнением

$$x_{Ia} = \frac{1}{2r_{01}} y_{Ia}^2 + B_I y_{Ia}^4 + C_I y_{Ia}^6 + \dots, \quad (760)$$

дифференцируя формулу (760), получаем выражение для тангенсов углов γ_I нормалей с осью системы

$$\operatorname{tg} \gamma_I = \frac{dx_{Ia}}{dy_{Ia}} = \frac{y_{Ia}}{r_{01}} + 4B_I y_{Ia}^3 + 6C_I y_{Ia}^5 + \dots. \quad (761)$$

С другой стороны, имея в своем распоряжении ряд значений углов u_2 и полагая, что для нашей системы предмет расположен в бесконечности (в силу чего все углы u_1 должны быть равными нулю), используя формулу (32), см. § 2, находим ряд численных значений углов:

$$\operatorname{tg} \gamma_{Ia} = \frac{n_2 \sin u_2}{n_2 \cos u_2 - n_1}. \quad (762)$$

Приравнивая эти значения тангенсов углов γ_{Ia} значениям их в формулах (761), составляем систему линейных уравнений относительно величин коэффициентов B_I , C_I и т. д., решая которую, получим значения этих коэффициентов в первом приближении (так как профиль второй поверхности еще не обеспечивал нам устранения астигматизма).

Получив приближенные значения коэффициентов B_I , C_I и т. д. и обратившись к формуле (760), найдем ряд значений координат y_{Ib} и x_{Ib} точек, через которые должны пройти намеченные главные лучи. Входные углы для главных лучей вычисляются по формуле (758), углы γ_{Ib} — по формуле (761) с заменой величин y_{Ia} на y_{Ib} .

Далее, пользуясь формулами § 9—10 главы II, просчитаем ход главных лучей через обе поверхности системы и, пользуясь астигматическими инвариантами, — астигматизм; в результате этого определим величины отрезков s_2 и t_2 перед второй преломляющей поверхностью. С другой стороны, желая уничтожить астигматизм, приравняем отрезки s'_2 и t'_2 после второй преломляющей поверхности. Пользуясь меридиональным и сагиттальным инвариантами

$$\frac{n' \cos^2 i'}{i'} - \frac{n \cos^2 i}{i} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_t},$$

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_s} \quad (763)$$

и умножая сагиттальный инвариант на квадрат косинуса угла i' , исключим величины отрезков t' и s' . Таким образом, напишем

$$\frac{n \cos^2 i'}{s} - \frac{n \cos^2 i}{t} = (n' \cos i' - n \cos i) \left(\frac{1}{r_t} - \frac{\cos^2 i'}{r_s} \right). \quad (764)$$

Предположим, что при переходе от исходной сферической поверхности к несферической углы i и i' , а также и отрезки s и t изменятся сравнительно мало. В таком случае левую часть формулы (764) можно считать известной. Деля обе части формулы (764) на разность $n' \cos i' - n \cos i$, получим

$$\frac{\frac{n \cos^2 i'}{s} - \frac{n \cos^2 i}{t}}{n' \cos i' - n \cos i} = \frac{1}{r_s} \left(\frac{r_s}{r_t} - \cos^2 i' \right), \quad (765)$$

откуда, умножая обе части на величину сагиттального радиуса r_s , получаем значение отношения сагиттального и меридионального радиусов

$$\frac{r_s}{r_t} = \cos^2 i' + \frac{\frac{n \cos^2 i'}{s} - \frac{n \cos^2 i}{t}}{n' \cos i' - n \cos i} r_s. \quad (766)$$

Как видим, в правую часть формулы (766) вновь входит неизвестная величина сагиттального радиуса кривизны r_s .

Полагая, что величина сагиттального радиуса сравнительно мало отличается от величины радиуса r_{02} в вершине второй поверхности, в первом приближении заменим в формуле (766) значение r_s на r_{02} , после чего найдем приближенное значение отношения радиусов $r_s : r_t$.

Обращаясь к формулам (399) и (400), см. § 16, нетрудно составить отношение сагиттального и меридионального радиусов кривизны.

Находим

$$\frac{r_s}{r_t} = y \frac{x''}{x'} \cos^2 \gamma. \quad (767)$$

Дифференцируя формулу (761), получаем выражение для второй производной по x :

$$x'' = \frac{1}{r_{02}} + 12By^2 + 30Cy^4 + \dots \quad (768)$$

Деля ту же формулу на величину y , находим отношение $x' : y$:

$$\frac{x'}{y} = \frac{1}{r_{02}} + 4By^2 + 6Cy^4 + \dots \quad (769)$$

Пользуясь формулами (767), (768) и (769), составим выражение

$$\frac{x'}{y} - x'' \frac{r_t}{r_s} \cos^2 \gamma = 0. \quad (770)$$

Заменяя в формуле (770) величины $x' : y$ и x'' их развернутыми выражениями и группируя члены с одинаковыми степенями y , получаем

$$\frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{r_t}{r_s} \cos^2 \gamma \right) + 4B \left(1 - 3 \frac{r_t}{r_s} \cos^2 \gamma \right) y^2 + 6C \left(1 - 5 \frac{r_t}{r_s} \cos^2 \gamma \right) y^4 + \dots = 0. \quad (771)$$

Нетрудно видеть, что в формуле (771) известны все величины, кроме коэффициентов B , C и т. д.

Поэтому, составляя уравнения (771) для всех просчитанных лучей, получим систему линейных уравнений относительно коэффициентов B , C и т. д. Решая эту систему уравнений, найдем приближенные значения этих коэффициентов, поскольку введенные в формулу (771) величины были приближенными.

Имея в своем распоряжении приближенные значения коэффициентов и пользуясь формулами (760) и (761), можно уточнить значения величин x и x' . При этом после определения этих величин следует произвести уточнение и величин y (в соответствии с приемами, рассмотренными в § 9 главы II). Вслед за тем представится возможность произвести уточнение величин s_2 и t_2 , пользуясь формулой, которую нетрудно получить из рис. 50 (отрезки t'_1 и t_2 не показаны):

$$s_2 = s'_1 = \frac{y_{I1b} - y_{Ib}}{\sin \beta_2}, \quad t_2 = t'_1 - \frac{y_{I1b} - y_{Ib}}{\sin \beta_2}. \quad (772)$$

Имея в своем распоряжении углы γ , можно уточнить углы i и i' ; после этого, обратившись к формуле (766), переходим ко второму приближению.

Однако следует обратить внимание на то обстоятельство, что изменение величин коэффициентов уравнения профиля второй преломляющей поверхности, произошедшее в результате решения системы уравнений (771), вызовет изменение сферической aberrации после второй несферической поверхности, и в силу этого дальнейшее уточнение коэффициентов профиля поверхности при исправлении астигматизма всей системы будет производиться уже при наличии остаточной сферической aberrации. Поэтому целесообразно переходить ко второму приближению при определении коэффициентов профиля второй поверхности не сразу, а предварительно повторив исправление сферической aberrации с помощью первой поверхности после просчета лучей через вторую поверхность в обратном ходе, пользуясь коэффициентами ее профиля, полученными в результате первого приближения.

Таким образом, процесс последовательных приближений следует построить так, чтобы уточнение коэффициентов обоих профилей происходило поочередно, обеспечивая одновременное исправление и сферической aberrации, и астигматизма.

Необходимо отметить, что такой процесс чередования последовательных приближений может быть ускорен, если влияние одной из поверхностей на одну из корригируемых aberrаций будет мало. В таком случае вполне возможно процесс чередования построить так, чтобы на одной из поверхностей происходило два или более уточнений, а на второй — одно.

Так, например, в рассматриваемом случае при близком расположении диафрагмы к первой преломляющей поверхности эта поверхность будет мало влиять на изменение астигматизма всей системы, что позволяет производить два или более уточнений исправления сферической aberrации при одном уточнении коэффициентов на второй поверхности при исправлении астигматизма.

Г Л А В А X

КОНСТРУКЦИИ НЕКОТОРЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 33. Система Шмидта

Выше, в § 14 главы IV, была рассмотрена принципиальная схема системы Шмидта, состоящей из сферического зеркала и коррекционной пластинки, размещенной в центре кривизны сферического зеркала. Там же получены формулы (313), позволившие определить профиль коррекционной пластинки исходя из величины волновой aberrации, вносимой сферическим зеркалом, и пользуясь системой уравнений — формулы (320) — (323) — для тангенсов углов нормалей к профилю коррекционной пластинки.

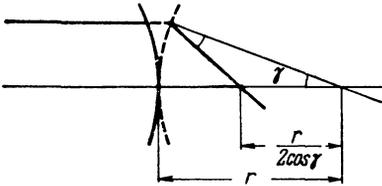


Рис. 51.

В качестве численного примера для первого приема произведем расчет профиля коррекционной пластинки для зеркала с фокусным расстоянием 500 мм и относительным отверстием 1 : 2,5. В этом случае получим отверстие системы, равное 200 мм, что обеспечит наибольшую вы-

соту луча на коррекционной пластинке $h = y = 100$ мм.

Величину сферической aberrации, которой обладает это зеркало без коррекционной пластинки, вычисляют по формуле, которую легко получить, пользуясь рис. 51, где представлена развертка сферического зеркала.

Из рис. 51 следует, что отраженный от зеркала луч, падающий на зеркало параллельно оси, составит с нормалью угол, равный углу самой нормали с осью системы, вследствие чего образуется равнобедренный треугольник, имеющий своим основанием радиус кривизны зеркала.

Помня, что для нулевых (параксиальных) лучей фокус зеркала расположится на половине радиуса, найдем величину сферической аберрации

$$\Delta s' = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{1}{\cos \gamma} \right). \quad (773)$$

Но величина косинуса угла γ может быть выражена через первую высоту h и радиус поверхности:

$$\Delta s' = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}}} \right) \quad (774)$$

и приближенно

$$\Delta s' = -\frac{h^2}{8f_0}. \quad (775)$$

Вычисляя величину сферической аберрации по точной формуле (774), получаем

$$\Delta s' = 500 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{0,99}} \right) = -2,51.$$

Величина синуса угла γ равна 0,1000; величина самого угла γ равна 5,7392°, и величина апертурного угла u' получится равной двум γ и будет равна 11,4784°.

Величина синуса апертурного угла будет 0,19900. Если ограничиться точностью определения величин сферической аберрации в 0,01 мм, что составит величину погрешности при определении сферической аберрации в 0,5%, то вместо точной формулы (774) можно воспользоваться приближенной формулой (775), соответствующей величине сферической аберрации III порядка.

В этом случае для определения волновой аберрации вполне пригодны следующие очень простые формулы:

$$-\varepsilon = \frac{\sigma}{4} u' = \frac{\Delta s'}{4} u'^2 = -\frac{0,5}{4} 0,2 = -0,025.$$

В соответствии с найденным значением волновой аберрации, пользуясь формулой (313), найдем и уравнение профиля несферической поверхности. Полагая коэффициент преломления стекла, из которого изготавливается коррекционная пластинка, равным 1,5, получаем

$$x = \frac{\varepsilon}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{\varepsilon}{1 - \frac{2}{3}} = 3\varepsilon. \quad (776)$$

Подставляя в формулу (776) величину волновой аберрации, определенной для края отверстия, получаем величину деформации x для края отверстия

$$x = 3\varepsilon = 0,075.$$

Так как величина сферической aberrации могла быть принята соответствующей сферической aberrации третьего порядка, то величина волновой aberrации выразится в виде уравнения параболы четвертой степени:

$$x = By^4 = 0,075, \quad (777)$$

откуда

$$B = \frac{x}{y^4} = \frac{0,075}{100^4} = 0,075 \cdot 10^{-8}.$$

Как уже говорилось (см. § 1), выгодно перейти к величинам B и y . В нашем частном случае примем масштаб величин

$$\bar{y} = y \cdot 10^{-2} \text{ и } \bar{B} = B \cdot 10^{-8}.$$

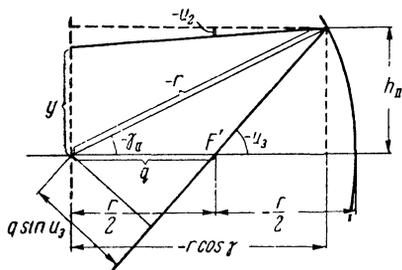


Рис. 52.

Тогда величины y равны 1 и величина B равна 0,075. Величина x , как нетрудно убедиться непосредственной подстановкой величин \bar{y} и \bar{B} вместо y и B , сохранится неизменной.

В качестве второго примера выполним расчет светосильной системы Шмидта с относительным отверстием 1 : 1 методом решения системы линейных уравнений для

коэффициентов профиля несферической поверхности.

Поставим задачу одновременного исправления сферической aberrации для двух высот апертурного луча или для двух значений выходного апертурного угла. Значение выходного апертурного угла для края отверстия при относительном отверстии 1 : 1 определяется величиной синуса, равной 0,5; синус второго апертурного угла примем равным $\frac{\sqrt{2}}{4} = 0,35355$. Проследим отражение обеих апертурных лучей в зеркала в обратном ходе.

Пользуясь рис. 52, на котором представлен ход апертурного луча при прохождении его через систему Шмидта, видим, что синусы апертурного угла u_2 и угла, составляемого апертурным лучом с нормалью к зеркалу i_2 , относятся друг к другу как 1 : 2, поэтому величина синуса угла i_2 для обоих апертурных лучей составит соответственно 0,25000 и 0,17678. Вычисляя величины обоих углов i_2 , находим их значения, равные $14^\circ,4776$ и $10^\circ,1821$. Так как величины обоих выходных апертурных углов равнялись 30° и $20^\circ,7050$, можно определить величины апертурных углов между коррекционной пластинкой и зеркалом. Эти углы u_2 равны $-1^\circ,0448$ и $-0^\circ,3408$.

Составив разности между углами u_3 и i_2 , найдем углы γ_{II} для отражательной поверхности и вслед за тем определим высоты h_{II}

на этой поверхности для обоих апертурных углов. Эти высоты соответственно равны 107,046 и 73,052. Пользуясь рис. 52 и пренебрегая в первом приближении величинами абсцисс искомого профиля не-сферической поверхности на коррекционной пластинке, определяем высоты h_I на этом профиле. Высоты h_I , определенные по формуле

$$h_I = y = h_{II} - r \cos \gamma_{II} \operatorname{tg} u_2, \quad (778)$$

равны 100,015 и 70,713.

Имея в своем распоряжении углы u_2 и помня, что входные углы u_1 для обоих апертурных лучей должны быть равны нулю, найдем величины углов нормалей γ_I для определяемого профиля коррекционной пластинки по формулам (32), см. § 2, и (319), см. § 14:

$$\operatorname{tg} \gamma_I = \frac{-\sin u_2}{n - \cos u_2}. \quad (779)$$

Для данного случая эти углы примут значения, $2^\circ,0221$ и $0^\circ,6601$.

Пользуясь формулами (322), см. § 14, составим систему двух линейных уравнений относительно коэффициентов B и C :

$$\operatorname{tg} \gamma_{I1} = 0,035307 = 4B(100,015)^3 + 6C(100,015)^5,$$

$$\operatorname{tg} \gamma_{I2} = 0,011520 = 4B(70,713)^3 + 6C(70,713)^5.$$

Решая эту систему относительно коэффициентов B и C , находим

$$C = 0,09027 \cdot 10^{-12} \text{ или } \bar{C} = C \cdot 10^{12} = 0,09027$$

и

$$B = 75,02 \cdot 10^{-10} \text{ или } \bar{B} = B \cdot 10^8 = 0,7502;$$

при этом величина y должна быть заменена на $\bar{y} = y \cdot 10^{-2}$.

Получив значения коэффициентов \bar{B} и \bar{C} , напишем уравнение для абсциссы x :

$$x = \bar{B} \bar{y}^4 + \bar{C} \bar{y}^6 = 0,7502 \bar{y}^4 + 0,0927 \bar{y}^6.$$

Подставляя в это уравнение значения ординат \bar{y} , найдем численные значения абсцисс x , равные 0,84096 и 0,19876. Переходя ко второму приближению, учтем эти значения x при определении ординат y , для чего воспользуемся уточненной формулой

$$y = h_{II} - (r \cos \gamma_{II} + x) \operatorname{tg} u_2. \quad (780)$$

Согласно этой формуле, величины y несколько изменятся и примут значения 100,032 и 70,714.

Сопоставляя эти новые значения с ранее найденными, видим, что при переходе ко второму приближению величины y изменились в пятой значащей цифре, что соответствует точности пятизначных логарифмических таблиц.

Повторяя все ранее проделанные вычисления, найдем уточненные значения коэффициентов \bar{B} и \bar{C} , равные соответственно 0,7473 и 0,08962.

Уточненные значения коэффициентов отличаются от первоначальных в третьем знаке. Однако, находя с их помощью новые значения абсцисс x , получим расхождения с первоначальными значениями x в третьем знаке после запятой, что при определении величин ординат в третьем приближении может оказать влияние лишь в шестой значащей цифре, т. е. уже за пределами точности пятизначных таблиц. В силу этого результаты, получаемые после третьего приближения, уже не будут отличаться от результатов после второго приближения, что и позволяет остановиться на итогах второго приближения.

§ 34. Расчет объектива с малым деформированием сферической поверхности

В качестве иллюстрации к исправлению аберраций высших порядков оптической системы, корригированной в области аберраций третьего порядка с помощью малых деформаций сферической поверхности, рассмотрим исправление сферической аберрации высших порядков для объектива из двух соприкасающихся друг с другом бесконечно тонких линз.

В качестве стекол для такого объектива возьмем комбинацию из тяжелого крона ТК 16 и флинта Ф1 с почти одинаковыми показателями преломления и различными дисперсиями. Выбор такой пары стекол значительно упрощает обработку зейделевских сумм. Также с целью упрощения этой обработки примем толщину линз и воздушного промежутка между ними равными нулю.

Задаваясь равенством нулю первой и второй зейделевских сумм и первой хроматической суммы, получаем систему трех уравнений, решая которую определяем значения углов параксиального луча α_1 , α_2 и α_3 , определяющих собой в сочетании и со значением $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_5 = 1$ величины радиусов кривизны компонентов объектива.

Не останавливаясь на разворачивании этих сумм и их решении, сразу приведем величины всех параксиальных углов в соответствии с двумя возможными решениями:

$$\begin{array}{lll}
 \alpha_1 = 0 & \alpha_1 = 0 & n_1 = 1 \\
 \alpha_2 = 0,5839 & \alpha_2 = 2,5957 & n_2 = 1,6126 \\
 \alpha_3 = 2,6636 & \alpha_3 = 2,6636 & n_3 = 1 \\
 \alpha_4 = 0,5639 & \alpha_4 = 3,7855 & n_4 = 1,6128 \\
 \alpha_5 = 1 & \alpha_5 = 1 & n_5 = 1
 \end{array}$$

Зададим рассчитываемому объективу фокусное расстояние, равное 1000 мм, и относительное отверстие 1 : 5. Используя значения углов α , принадлежащих первому решению (дающему, как извест-

но, систему с более пологими радиусами), находим значения радиусов кривизны нашего объектива:

$$\begin{aligned} r_1 &= 650,5970 \\ r_2 &= -355,7483 \\ r_3 &= -349,3446 \\ r_4 &= -6768,130 \end{aligned}$$

Посредством тригонометрического просчета лучей определим величину сферической аберрации для пяти высот апертурного луча:

h	100	80	60	40	20
$\Delta s'$	2,42	0,83	0,24	0,03	0,01

При построении графика для величины изменения сферической аберрации для различных высот будем наблюдать весьма характерную картину почти полного отсутствия сферической аберрации при малых высотах h и быстрый рост сферической аберрации для больших высот.

Имея численные значения сферической аберрации и полагая, что остаточная сферическая аберрация по своему характеру мало отличается от сферической аберрации пятого порядка, можно вычислить величину волновой аберрации для края отверстия. В нашем случае величина выходного апертурного угла приблизительно равна отношению первой высоты к фокусному расстоянию объектива $u' = h/f' = 100 : 1000 = 0,1$; величина поперечной аберрации $\sigma = \Delta s' u' = 2,42 \cdot 0,1 = 0,242$; величина волновой аберрации равна $-\frac{\sigma}{6} u' = 0,00403$ мм. В этом случае мы можем прибегнуть к деформации последней сферической поверхности объектива.

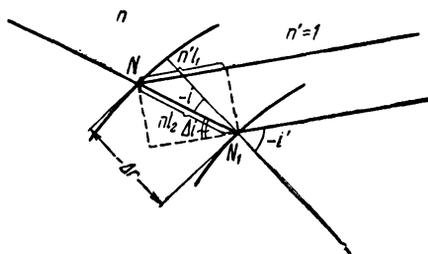


Рис. 53.

Выбор последней поверхности для деформирования очень удобен, так как для определения необходимой деформации позволяет воспользоваться принципом Ферма, добиваясь компенсации волновой аберрации за счет добавления дополнительной толщины линзы в направлении ее нормали.

На рис. 53 представлен участок деформируемой сферической поверхности до и после ее деформации. В точке N происходило преломление луча на сферической поверхности. После деформирования преломляющая поверхность в рассматриваемом участке переместилась в направлении своей нормали на некоторую величину $-\Delta r$, и луч, который раньше преломлялся в точке N , будет преломляться в точке N_1 .

Расстояние между точками N и N_1 примем равным e_2 ; этому расстоянию соответствует оптическая длина хода nl_2 . Рассматривая ход

преломленного луча до деформации поверхности, видим, что вместо отрезка l_2 в стекле луч должен был пройти отрезок l_1 в воздухе.

Можем составить разность оптических длин в обоих случаях; приравнявая эту разность величине волновой аберрации с обратным знаком, тем самым потребуем устранения волновой аберрации.

Пользуясь рис. 53, нетрудно связать разность оптических длин с величиной деформации Δr нашей поверхности:

$$\Delta r = \frac{\varepsilon \cos i}{n - \cos \Delta i}. \quad (781)$$

С другой стороны, пользуясь формулой (462), см. § 20 главы V, связывавшей между собой величину деформации радиуса-вектора и величину угла поворота нормали, и формулой (781), можно выразить угол поворота нормали через величину волновой аберрации:

$$\alpha = \frac{6 \Delta r}{r_0 \varphi} = \frac{6}{r_0 \varphi} \left(\frac{\varepsilon \cos i}{n - \cos \Delta i} \right), \quad (782)$$

где α — угол поворота нормали;

ε — волновая аберрация;

r_0 — радиус кривизны поверхности;

Δr — деформация поверхности;

φ — полярный угол, определяющий положение точки преломления луча на исходной сферической поверхности.

Подставляя в формулу (782) числовые значения всех входящих в нее величин для края отверстия, определяем угол поворота нормали для края отверстия α , равный — 0,024866 град.

Обращаясь к формуле (446), см. § 20, и ограничиваясь лишь одним коэффициентом разложения C , нетрудно найти значение этого коэффициента исходя из формулы (781):

$$C = \frac{\Delta r}{\varphi^6} = \frac{\varepsilon \cos i}{(n - \cos \Delta i) \varphi^6}. \quad (783)$$

Зная величину коэффициента C и пользуясь формулой (782), можно вычислить углы поворота нормалей для всех лучей, ход которых был определен для всех заданных высот h ; далее определим величины последних отрезков s' и сферическую аберрацию $\Delta s'$ (табл. 4).

Таблица 4

h	α	s'	$\Delta s'$
100	—0,024866	999,991	—0,009
80	—0,0081481	999,817	—0,138
60	—0,001934	999,980	—0,020
40	—0,0002546	999,985	—0,015
20	—0,00000796	999,985	—0,015

Нетрудно видеть, что введение деформации сферической поверхности практически уничтожает сферическую aberrацию высшего порядка.

§ 35. Ортоскопическая линза для широкоугольного фотографического объектива

В качестве иллюстрации интегральных методов расчета профиля несферической поверхности, рассмотренных в главе VII, выполним расчет профиля несферической поверхности для передней ортоскопической линзы в широкоугольном фотографическом объективе. Подобные ортоскопические линзы с угловым увеличением, меньшим единицы, позволяют, как известно, существенно улучшать светораспределение в фотографических объективах, обладающих большими полями зрения.

В частном, исследуемом случае подобная ортоскопическая линза может быть осуществлена с первой, planoидной поверхностью и второй, сферической поверхностью, апланатичной к центру выходного зрачка всей линзы.

Для удобства расчета толщину линзы примем равной нулю

(переход к толщинам, отличным от нуля, можно осуществить в последующем). Схема такой линзы представлена на рис. 54; величины полевых углов для пространства предметов даны без индекса; полевые углы между поверхностями даны с одним штрихом вверх и полевые углы после всей линзы с двумя штрихами вверх.

Полагая, что вторая сферическая поверхность будет использоваться до полусферы, высоту главного луча на второй поверхности принимаем равной ее радиусу.

Обращаясь к области параксиальных лучей, нетрудно определить угловые увеличения для первой и второй поверхностей данной линзы. Действительно, руководствуясь тем, что первая поверхность была принята planoидной, в окрестности оси системы эта поверхность обладает свойствами плоской поверхности. Поэтому угловое увеличение ее равно

$$W_{01} = \frac{\beta'_0}{\beta_0} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n}, \quad (784)$$

так как первая среда — воздух.

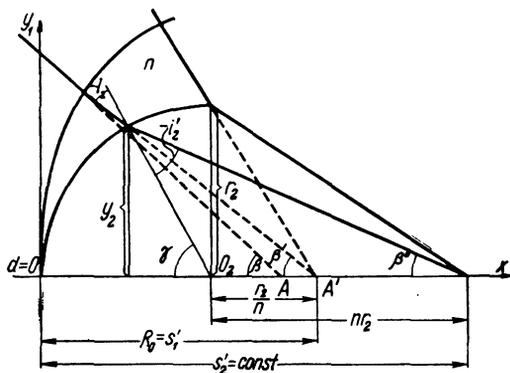


Рис. 54.

Апланатичность второй поверхности связывает полевые углы до и после поверхности, согласно известной формуле

$$n \sin \beta'' = \sin \beta', \quad (785)$$

откуда без труда получаем угловое увеличение второй поверхности для нулевых лучей

$$W_{02} = \frac{\sin \beta''}{\sin \beta'} = \frac{1}{n}. \quad (786)$$

Перемножая формулы (784) и (786), получаем угловое увеличение для всей линзы:

$$W_0 = W_{01} W_{02} = \frac{1}{n^2}. \quad (787)$$

Если задаться условием отсутствия дисторсии для предмета, расположенного в бесконечности, то величина отношения тангенсов полевых углов до и после нашей линзы должна быть постоянной и равной угловому увеличению W_0 для нулевых лучей, поэтому

$$\frac{\operatorname{tg} \beta''}{\operatorname{tg} \beta} = W = W_0 = \frac{1}{n^2} = \operatorname{const}. \quad (788)$$

Формулы (788) и (785) определяют зависимости между всеми полевыми углами — в пространстве предметов, в пространстве между поверхностями системы и в пространстве после линзы.

Можно задаться рядом значений полевых углов, например углов β' в пространстве между поверхностями линзы, вычислить вначале углы β'' после линзы, а затем и углы β перед линзой.

Для удобства вычислений величины интервалов между значениями углов β' могут быть приняты равными друг другу.

Далее, обращаясь к формуле (32), см. § 2,

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{n \sin \beta' - \sin \beta}{n \cos \beta' - \cos \beta}, \quad (789)$$

вычислим значения всех углов γ_1 для первой, planoидной поверхности линзы.

Составив разности между углами β и γ и β' и γ , найдем величины углов падения и преломления i_1 и i'_1 и, таким образом, будем знать все величины, необходимые для вычисления интеграла несферической поверхности, согласно формуле (610), см. § 25. Величина R_0 , входящая в эту формулу, представляет собой отрезок главного луча после первой или перед второй поверхностью $s'_1 = s_2$ и может быть выражена согласно известным формулам

$$R_0 = s'_1 = s_2 = r_{02} \left(1 + \frac{1}{n} \right). \quad (790)$$

Переходя к численному интегрированию, зададимся следующими числовыми величинами:

1. Интервал углов β' примем равным от 0 до 36° ; этот интервал разобьем на 18 равных элементов по 2° .

2. Показатель преломления примем 1,6126 (стекло марки ТК 16); в соответствии с этим угловое увеличение W_0 для нашей линзы равно 0,384542.

3. Величину начального радиуса-вектора R_0 примем равной 100 мм. В этом случае величина радиуса кривизны второй поверхности r_{02} равна 37,982 мм (при $d = 0$).

Для вычисления β , β' , β'' и γ составим табл. 5.

Таблица 5

№ п. п.	β	β'	β''	γ
1	0,00000	0,00000	0,0000	0,00000
2	3,57989	2,22222	1,377861	0,00786
3	7,13794	4,44444	2,75469	0,06227
4	10,65312	6,66667	4,12946	0,20652
5	14,10575	8,88889	5,50110	0,47815
6	17,47842	11,11111	6,86857	0,90682
7	20,75604	13,33333	8,23081	1,51429
8	23,92628	15,55556	9,58673	2,31423
9	26,97962	17,77778	10,93526	3,31375
10	29,90918	20,00000	12,24523	4,51425
11	32,71057	22,22222	13,66552	5,91338
12	35,38171	24,44444	14,92493	7,50642
13	37,92252	26,66667	16,23242	9,28717
14	40,33378	28,88889	17,52654	11,24918
15	42,61809	31,11111	18,80604	13,38591
16	44,77906	33,33333	20,06971	15,69207
17	46,82972	35,55556	21,31614	18,16320
18	48,74766	37,77778	22,54397	20,79444
19	50,56434	40,00000	23,75172	23,58431
20	52,27596	42,22222	24,93788	26,53038
21	53,88717	44,44444	26,10096	29,63041

Вычисляя далее i' , $\text{tg } i'$, R и координаты точек профиля поверхности в прямоугольных координатах x и y , составим табл. 6.

Координаты точек x и y вычисляются по формулам (622):

$$y = -R \sin \beta', \quad x = R_0 - R \cos \beta'. \quad (791)$$

Формула (791) учитывает перенос начала прямоугольных координат в вершину профиля несферической поверхности.

Точность численного интегрирования функции $\text{tg } i'$ легко установить, определяя изменение элементарной площади ds при разделении ее на два составляющих элемента, как показано на рис. 46.

Обращаясь к рассмотренному примеру, можно определить величину учитываемой площади при разделении исходного элемента ds на составляющие элементы ds_k и ds_{k+1} .

Таблица 6

№ п. п.	i'	$\operatorname{tg} i'$	R	x	y
1	0,00000	0,000000	100,0000	0,0000	0,0000
2	2,21436	0,034797	100,0609	0,0002	3,4921
3	4,38217	0,068944	100,2421	0,0020	6,9925
4	6,46015	0,101826	100,5414	0,0095	10,5095
5	8,41075	0,132890	100,9542	0,0282	14,0501
6	10,20429	0,161676	101,4743	0,0672	17,6208
7	11,81904	0,187816	102,0953	0,1355	21,2268
8	13,94133	0,211047	102,8086	0,2454	24,8716
9	14,46403	0,231192	103,6050	0,4085	28,5574
10	15,48575	0,248164	104,4754	0,6380	32,2846
11	16,30884	0,261934	105,4098	0,9472	36,0523
12	16,93802	0,272523	106,3976	1,3497	39,8571
13	17,37950	0,279987	107,4285	1,8590	43,6952
14	17,63971	0,284399	108,4920	2,4880	47,5599
15	17,72520	0,285852	109,5772	3,2490	51,4433
16	17,64126	0,284427	110,6733	4,1540	55,3366
17	17,39236	0,280204	111,7695	5,2142	59,2289
18	16,98334	0,273288	112,8542	6,4396	63,1073
19	16,41569	0,263728	113,9171	7,8390	66,9589
20	15,69184	0,251603	114,9463	9,4212	70,7680
21	14,81403	0,236992	115,9305	11,1920	74,5187

Возьмем три последние цифры в третьей колонке табл. 6 — 0,263728, 0,251603 и 0,236992. Переводя интервал между абсциссами в радианы, получаем его величину, равную 0,034907.

Вычисляя площадь треугольника, образованного тремя соседними точками на кривой, находим величину этой площади, равную 0,000043. Таким образом, приходим к заключению, что величина площади, учтенной при разделении исходного элемента на два, составляет около 20 единиц шестого знака. После следующего разделения элемента интегрирования убедимся, что дальнейшее уточнение уже за пределами точности вычислений с шестизначными таблицами логарифмов.

Если обратиться к началу табл. 6, то получим величину учитываемой площади менее шести единиц шестого знака.

§ 36. Использование плоскоэллиптической линзы в гидросъемочных ортоскопических объективах

Обращаясь к случаю плоскопараболической линзы (см. § 5 главы I), видим, что такая линза, если ее выходной зрачок расположен в бесконечности (т. е. при телецентрическом ходе лучей в пространстве изображений), может быть исправлена на дисторсию путем подбора соответственного показателя преломления. Кроме того, такая плоскопараболическая линза, о чем уже говорилось (см. § 4 главы I), будет строго исправлена на астигматизм по всему полю зрения.

В равной степени, обращаясь к одной сферической преломляющей поверхности и размещая выходной зрачок в центре поверхности, получаем для предмета, расположенного в стекле, полное отсутствие астигматизма и дисторсии.

Эту сферическую поверхность следует рассматривать так же, как случай плоскосферической линзы, но при первой среде с показателем преломления, равным показателю преломления стекла, из которого изготовлена линза.

Сопоставляя друг с другом плоскосферическую и плоскопараболическую линзы, видим, что в обоих случаях профиль силовой поверхности является кривой второго порядка; обе линзы будут строго исправлены на астигматизм по всему полю зрения и будут корригированы также на дисторсию. Однако показатель преломления пер-

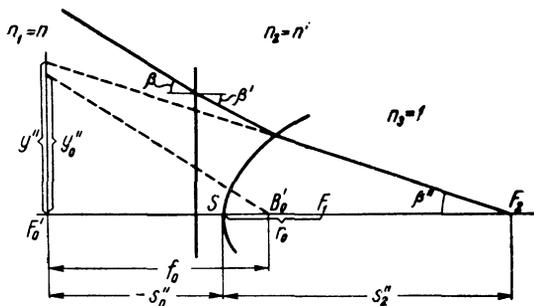


Рис. 55.

вой среды при переходе от плоскопараболической линзы к плоскосферической возрастает от единицы (воздух) до n (показатель преломления стекла).

Поскольку показатель преломления воды лежит между единицей и показателями преломления стекол, а также учитывая, что переход от параболы к сфере можно произвести через эллиптическую поверхность, вправе предположить возможность подбора параметров, обеспечивающих строгое исправление дисторсии для одного из заданных углов поля зрения при одновременном исправлении астигматизма по всему полю.

Рассмотрим эту задачу более подробно. Обратимся к рис. 55, где представлен ход главного луча, идущего из среды с показателем преломления $n_1 = n$ через плоскоэллиптическую линзу с показателем преломления $n_2 = n'$ и пересекающего ось по выходе из линзы в воздух ($n_3 = 1$) в точке F_2 геометрического фокуса эллиптической поверхности. Этот луч образует с осью линзы углы β , β' и β'' ; расстояние от вершины S поверхности до гауссовой фокальной плоскости, проходящей через задний фокус линзы F_0' , обозначим через S_0'' (на рис. 55 эта величина отрицательна); положение геомет-

рического фокуса F_2 эллипса определим расстоянием s_2'' . Тогда величина изображения y'' определится по формуле

$$y'' = (s_2'' - s_0'') \operatorname{tg} \beta'' . \quad (792)$$

Величину неискаженного изображения y_0'' определим, исходя из величины переднего фокусного расстояния f_0 линзы и величины тангенса входного полевого угла:

$$y_0'' = f_0 \operatorname{tg} \beta . \quad (793)$$

Так как первая среда в данном случае не является воздушной, то величина переднего фокусного расстояния свяжется с величиной заднего фокусного расстояния $f_0' = s_0''$ по формуле

$$f_0 = -\frac{n}{n''} \quad f_0' = -nf_0' = -ns_0'' = -\frac{nr_0}{n'' - n'} = \frac{nr_0}{n' - 1} . \quad (794)$$

Величина s_2'' определена в § 4 главы I [см. формулу (97)]. Поэтому в соответствии с формулами (794) формулы (792) и (793) преобразуются:

$$y'' = \left(s_2'' + \frac{r_0}{n' - 1} \right) \operatorname{tg} \beta'' , \quad (795)$$

$$y_0'' = \frac{nr_0}{n' - 1} \operatorname{tg} \beta . \quad (796)$$

При условии устранения дисторсии следует приравнять друг другу формулы (795) и (796):

$$\left(s_2'' + \frac{r_0}{n' - 1} \right) \operatorname{tg} \beta'' = \frac{nr_0}{n' - 1} \operatorname{tg} \beta , \quad (797)$$

откуда, деля обе части на величину радиуса r_0 в вершине поверхности и оставляя в левой части лишь один член, содержащий отношение $\frac{s_2''}{r_0}$, получаем

$$\frac{s_2''}{r_0} = \frac{n \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta''}{(n' - 1) \operatorname{tg} \beta''} . \quad (798)$$

Но, согласно формуле (97), см. § 4 главы I,

$$\frac{s_2''}{r_0} = -\frac{1}{B} (1 + \sqrt{1 + B}) , \quad (799)$$

поэтому формулу (798) представим в следующем виде:

$$1 + \sqrt{1 + B} = -B \frac{n \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta''}{(n' - 1) \operatorname{tg} \beta''} . \quad (800)$$

Освобождаясь от иррациональности в формуле (800), получаем

$$1 = 2 \frac{n \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta''}{(n' - 1) \operatorname{tg} \beta''} + \left(\frac{n \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta''}{(n' - 1) \operatorname{tg} \beta''} \right)^2 B , \quad (801)$$

откуда

$$-B = 1 - \left(1 - \frac{(n' - 1) \operatorname{tg} \beta'}{n \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta''} \right)^2 = \frac{r_0}{a}, \quad (802)$$

где, согласно формуле (100) в § 4 главы I, a — большая полуось эллипса.

В полученную формулу входят углы β и β'' . Полагая величину входного угла β заданной, величину угла β'' определим следующим образом. Согласно закону преломления

$$n' \sin \beta' = n \sin \beta, \quad (803)$$

величину угла β' находим после преломления на плоской поверхности нашей линзы.

Далее, задаваясь величиной угла падения i_2 на эллиптическую поверхность, находим синус угла i_2' :

$$\sin i_2' = n' \sin i_2, \quad (804)$$

после чего определяем угол β'' по формуле

$$\beta'' = \beta' + i_2' - i_2. \quad (805)$$

Для иллюстрации приведем следующий численный пример. Полагая в качестве первой среды воду и принимая, что линза изготовлена из стекла марки ТК 16, получаем показатели преломления $n_1 = 1,33304$ и $n_2 = 1,6126$. Зададим полевой угол β в воде равным 45° , откуда, согласно формуле (803),

$$\beta' = 35^\circ 46' 04''.$$

Предположим, что угол преломления i_2 равен 15° . Тогда в соответствии с формулой (804) угол i_2' будет равен $24^\circ 40' 07''$ и величина угла β'' примет значение $26^\circ 05' 57''$.

Пользуясь формулой (802), найдем значение коэффициента B . Выполнив соответствующие вычисления, находим

$$-B = 0,585161 = \frac{r_0}{a}.$$

Принимая $r_0 = 18,000$, определяем величину большой полуоси a , равной $30,76079$, и малой полуоси b , равной $23,53072$.

Эксцентриситет $c = 19,81241$, отрезок до зрачка $s_2'' = 50,57320$.

§ 37. Система из двух несферических зеркал

В качестве примера расчета совокупности двух несферических поверхностей рассмотрим апланатическую систему из двух зеркальных поверхностей.

Комбинация двух зеркальных поверхностей может быть охарактеризована различными способами. Так, задаваясь какой-либо

постоянной величиной для фокусного расстояния системы, а затем силами первой и второй поверхностей, можно было бы определить величину расстояния между этими поверхностями. Однако подобный подход исключает из рассмотрения телескопические системы, поэтому используем другой способ.

Примем за постоянную величину расстояние d между обеими отражающими поверхностями. В частности, эту величину удобно принять равной единице. Свободными параметрами выберем обратные величины радиусов кривизны r_1 и r_2 обеих поверхностей в их вершинах.

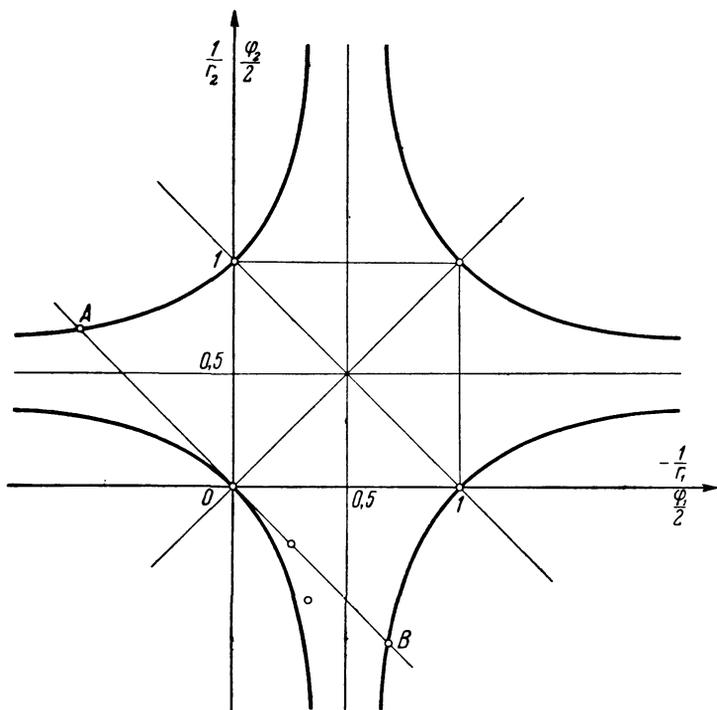


Рис. 56.

Такой способ задания параметров, определяющих собой двухзеркальную систему, выгоден тем, что позволяет включить в рассмотрение, кроме оптических систем, обладающих конечными значениями фокусных расстояний (как положительных, так и отрицательных), и телескопические системы. При этом можно представить на плоском графике любую из всевозможных комбинаций двухзеркальных систем точкой, координатами которой являются обратные величины радиусов обеих поверхностей (рис. 56).

Нетрудно представить, что точка, расположенная на одной из координатных осей, определит собой систему, состоящую из одного

плоского или planoидного зеркала и одного силового зеркала, сферического или несферического.

В частности, если за ось абсцисс принята ось $x = -\frac{1}{r_1}$ (что соответствует половине силы φ_2 первого зеркала), а за ось ординат $y = \frac{1}{r_2}$ (что равносильно половине силы φ_2 второго зеркала), то в точке с координатами $x = \frac{1}{r_1} = 0$ и $y = \frac{1}{r_2} = 1$ приходим к системе с первым planoидным зеркалом, расположенным в центре второго зеркала.

Такая система легко отождествляется с хорошо известной системой Шмидта, которая может быть скорригирована одновременно на сферическую aberrацию, кому и астigmatизм.

Рассматривая систему с координатами $x = -\frac{1}{r_1} = 1$ и $y = \frac{1}{r_2} = 0$, приходим к зеркалу, в центре которого расположено второе, плоское или planoидное зеркало.

Подобная система, как и система Шмидта, также скорригируется на сферическую aberrацию, кому и астigmatизм одновременно; ее можно было бы назвать обратной системой Шмидта. Начало координат соответствует комбинации двух плоских соприкасающихся зеркал; такая система является афокальной, обладает видимым увеличением $\Gamma = 1$ и будет свободной от всех aberrаций.

Задаваясь координатами $x = -\frac{1}{r_1} = 1$ и $y = \frac{1}{r_2} = 1$, приходим к системе двух положительных зеркал с фокусными расстояниями, равными по 0,5 при $d = 1$. Такая пара зеркал составит телескопическую систему с увеличением $\Gamma = -1$.

Делая оба зеркала параболическими, приходим к известной системе Мерсенна, строго скорригированной на сферическую aberrацию, условие синусов и астigmatизм.

Задаваясь равенством $r_1 = r_2$ или $-x = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} = y$, приходим к комбинации зеркал, при которой будет соблюдено условие Пецваля.

Эти системы определяются прямой линией, проходящей через начало координат под углом в 45° к координатным осям.

Возвращаясь к телескопическим системам, установим для них зависимость между обратными величинами радиусов кривизны и видимым увеличением Γ .

Расстояние между системами d представим как разность фокусных расстояний обоих зеркал

$$d = f'_1 + f'_2 = -\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{2} = -\frac{1}{2}(r_1 - r_2). \quad (806)$$

Величина видимого увеличения Γ определится отношением фокусных расстояний:

$$\Gamma = -\frac{f'_1}{f'_2} = \frac{r_1}{r_2} = -\frac{y}{x}, \quad (807)$$

откуда

$$\frac{2d}{r_1 r_2} = -\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = -\frac{1}{r_1} + \frac{\Gamma}{r_1} = \frac{\Gamma - 1}{r_1} \quad (808)$$

или

$$y = \frac{1}{r_2} = \frac{\Gamma - 1}{2d} = \frac{\Gamma - 1}{2} \quad (809)$$

и

$$x = \frac{1}{r_1} = \frac{\Gamma - 1}{2\Gamma}. \quad (810)$$

Заменяя в формуле (808) обратные величины радиусов кривизны величинами x и y , пишем

$$-2xy = x + y. \quad (811)$$

Рассматривая формулу (811), нетрудно прийти к выводу, что зависимость, связывающая между собой величины, обратные радиусам кривизны обоих зеркал, представляет собой равнобочную гиперболу, действительная ось которой проходит через начало координат под углом в 45° к координатным осям и перпендикулярно прямой, для которой соблюдается условие Пецваля.

Заметим, что ветвь гиперболы, дающая положительные значения для видимого увеличения Γ , проходит через начало координат. Асимптоты этой гиперболы проходят через точку с координатами $x = +0,5$ и $y = +0,5$ параллельно координатным осям. Существенно, что, придавая обоим зеркалам, составляющим телескопическую систему, параболическую форму, приходим к системам Мерсенна различных увеличений.

Это, в свою очередь, приводит к выводу, что, идя вдоль обеих ветвей гиперболы, на которой расположены телескопические системы, всегда можно обеспечить одновременное уничтожение сферической аберрации, комы и астигматизма.

Вместе с тем, обращаясь к обеим системам Шмидта, расположенным на концах мнимой оси гиперболы, также получаем одновременное исправление астигматизма, сферической аберрации и комы. Поэтому, естественно, возникает вопрос о существовании других двухзеркальных систем, кроме систем Шмидта, которые могли быть скорректированы на те же три аберрации при конечных фокусных расстояниях.

Рассматривая расположение систем Шмидта (см. рис. 56), можно сделать предположение, что неафокальные системы, скорректированные одновременно на сферическую аберрацию, кому и астигматизм, расположатся на ветвях другой равнобочной гиперболы с асимптотами, совпадающими с асимптотами гиперболы для телескопических систем.

Такое предположение могло бы быть проверено, опираясь на теорию аберраций третьего порядка, однако в этом случае проверка окажется приближенной. Поэтому представляется более целесообразным осуществить проверку высказанного предположения путем

расчета нескольких систем, располагающихся на ветвях второй гиперболы.

Замечая, что ветви второй гиперболы расположены таким образом, что в двух точках они пересекаются с прямой, на которой соблюдается условие Пецваля, представляется возможным ожидать одновременного исправления кроме сферической аберрации, комы и астигматизма также и кривизны поля. Однако одна из этих двух точек даст мнимое изображение, что не имеет серьезного практического интереса, поэтому свой выбор оставим на точке, в которой координаты x и y принимают значения:

$$x = -\frac{1}{r_1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

что, в свою очередь, приводит к следующим значениям радиусов кривизны обеих отражающих поверхностей:

$$\begin{array}{rcl} r_1 = 1,414214 & n_1 = 1 & \\ r_2 = 1,414214 & d = -1 & n_2 = -1 \\ & & n_3 = 1 \end{array}$$

Полученная система обладает фокусным расстоянием $f'_0 = 0,5$ и отрезком $s'_0 = 1,207107$. Приводя систему к фокусному расстоянию $f'_0 = 2,0000$, получаем величину последнего отрезка $s' = 4,828427$ и величины радиусов кривизны равными $r_1 = r_2 = 5,656854$ при $d = -4,00000$.

Задавая относительное отверстие этой системы равным $1:1,000$, ставим задачу одновременного исправления сферической аберрации и отступлений от условия синусов на четырех высотах

$$\begin{aligned} h_1 = y_{11} &= 1, \\ h_2 = y_{12} &= \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866026, \\ h_3 = y_{13} &= \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707107, \\ h_4 = y_{14} &= \frac{1}{2} = 0,500000. \end{aligned}$$

Пользуясь методикой, изложенной в § 30 главы VIII, примем исходные значения для величин абсцисс точек обеих профилей x^*_I и x^*_{II} равными нулю; выполнив вычисления в соответствии с формулами, приведенными в указанном параграфе, получим следующие значения абсцисс x^*_I :

1-е приближение	0,0971568	0,0711202	0,0462928	0,0226094
2-е »	0,0931883	0,068993	0,0453891	0,0223932
3-е »	0,0936911	0,0691744	0,0454362	0,0223985
4-е »	0,0936339	0,0691710	0,0454364	0,0223969
5-е »	0,0936169	0,0691523	0,0454323	0,0223986
6-е »	0,0936303	0,0691626	0,0454344	0,0223978

Для абсцисс второй поверхности x_{II}^* получим такие значения последовательных приближений для тех же самых высот

1-е приближение	0,6997945	0,4819171	0,2968899	0,1379367
2-е »	0,5362304	0,4038342	0,2670925	0,1314667
3-е »	0,5763862	0,4171564	0,2702496	0,1317960
4-е »	0,5661247	0,4147943	0,2699007	0,1317771
5-е »	0,5688024	0,4152242	0,2699414	0,1317799
6-е »	0,5680949	0,4151447	0,2699361	0,1317791

Значения коэффициентов B_I , C_I , D_I и E_I , определяющие собой профиль первой несферической поверхности, соответственно равны:

$$B_I = 0,00465289 = 4,65289 \cdot 10^{-3},$$

$$C_I = 0,000645834 = 6,45834 \cdot 10^{-4},$$

$$D_I = 0,0000623551 = -6,23551 \cdot 10^{-5},$$

$$E_I = 0,00000555818 = 5,55818 \cdot 10^{-6}.$$

Коэффициент A_I , как известно, равен обратной величине удвоенного радиуса кривизны

$$A_I = \frac{1}{2r_1} = 0,0883884 = 8,883884 \cdot 10^{-2} = A_{II}.$$

Коэффициенты B_{II} , C_{II} , D_{II} и E_{II} для второй поверхности равны:

$$B_{II} = 0,003230607 = 3,230607 \cdot 10^{-3},$$

$$C_{II} = 0,000096533 = 0,96533 \cdot 10^{-4},$$

$$D_{II} = 0,000000800346 = 0,0800346 \cdot 10^{-5},$$

$$E_{II} = 0,0000003397385 = 0,3397385 \cdot 10^{-6}.$$

Через приведенную выше систему были вычислены крайние лучи на четырех высотах и получены следующие значения сферической абберации и отступления от условия синусов (табл. 7).

Таблица 7

Таблица 8

h_1	$\Delta s'$	$\Delta f'$
1,00000	-0,001108	-0,000336
0,866026	-0,000105	-0,000032
0,707107	-0,000013	-0,000005
0,500000	-0,003012	-0,001195

β_1	x_t	x_s
-39,58771	0,001347	-0,006498
-33,99994	-0,005355	-0,003175
-27,54726	-0,00779	-0,01283
-19,33992	-0,001018	-0,003252

Астигматизм для системы, указанной в табл. 7, вычислялся при зрачке входа, совпадающем с первым зеркалом, для следующих значений полевых углов (табл. 8).

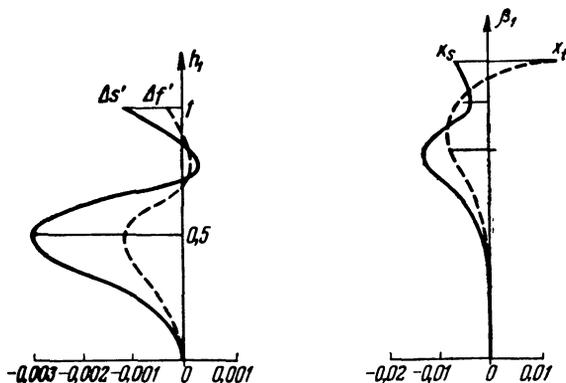


Рис. 57.

Графики сферической aberrации, отступлений от условия синусов и графики астигматизма представлены на рис. 57.

§ 38. Исправление астигматизма и сферической aberrации с помощью одной несферической поверхности для простой линзы в воздухе

В качестве численного примера, иллюстрирующего выводы, полученные в § 23 главы VI, рассмотрим одновременное исправление астигматизма и сферической aberrации для тонкой линзы, совпадающей со зрачком входа.

Известно, что величина астигматизма для этого случая является независимой от формы линзы и вполне определяется величиной полевого угла β и фокусного расстояния линзы f'_0 . Для положительной линзы астигматизм будет отрицательным и явится функцией в первом приближении второй степени относительно полевого угла. Иными словами, в данном случае имеет место астигматизм третьего порядка.

Придавая первой поверхности линзы сферическую форму и делая вторую поверхность плоской, получим для такой линзы сферическую aberrацию также отрицательную и выражающуюся в первом приближении функцией второй степени относительно апертурного угла. Таким образом, будем иметь дело и со сферической aberrацией того же, третьего порядка.

Сопоставляя между собой сферическую aberrацию и астигматизм, видим, что их совместному исправлению с помощью одной несферической поверхности не противоречат ни знаки, ни общий характер обеих aberrаций.

Зададимся величиной фокусного расстояния для названной линзы в 100 мм.

Вычисляя радиус кривизны первой поверхности, получаем

$$r_1 = 61,26 \quad d = 0 \quad n_2 = 1,6126$$

$$r_2 = \infty \quad f'_0 = s'_0 = 100,00.$$

Задавая относительное отверстие для этой линзы равным 1 : 2,5, вычисляем величину сферической аберрации для двух высот:

$$h_1 = 20,0 \quad \Delta s'_1 = -3,418 \quad u'_1 = 11,9461^\circ$$

$$h_2 = 14,0 \quad \Delta s'_2 = -1,642 \quad u'_2 = 8,1825^\circ.$$

Величину астигматизма вычислим для полевого угла β , равного 15° . Находим для фокусных расстояний f'_t и f'_s вдоль главного луча значения

$$f'_t = 91,334, \quad f'_s = 97,892.$$

Эти фокусные расстояния определяют нам положения меридионального и сагиттального фокусов относительно центра выходного зрачка.

Обращаясь к формуле (540), см. § 23 главы VI, и пользуясь величинами апертурных углов для крайнего луча, идущего на высоте $h = 20$ и полевых углов для главного луча, составляющего с осью системы угол β , равный 15° , получим следующее значение отрезка s'_0 :

$$s'_0 = \frac{a}{1 + \frac{\cos \beta \operatorname{tg} u}{\cos u \operatorname{tg} \beta} \sqrt{\frac{t_1 - s_i}{\Delta s'} \left(\frac{\cos u - n \cos u'}{\cos \beta - n \cos \beta'} \right) \frac{1}{\left(\frac{3}{\cos^2 \beta} - 1 \right) \cos u}}} = 0,577814,$$

где $a = 57,7814$.

Расстояние d от линзы до коррекционной пластинки определится по формуле

$$d = a - s'_0 = 42,2186.$$

Далее находим косую толщину \bar{d} — расстояние от центра зрачка до плоской поверхности коррекционной пластинки вдоль главного луча:

$$\bar{d} = \frac{d}{\cos \beta} = \frac{42,2186}{\cos 15^\circ} = 43,709,$$

а также высоту y^∞ главного луча на той же плоскости:

$$y^\infty = \bar{d} \operatorname{tg} \beta = 10,9272.$$

Обращаясь к формуле (537), вычисляем значение коэффициента B :

$$B = 25823,8 \cdot 10^{-10},$$

после чего находим уточненные значения координат y и x главного луча точки пересечения со второй, деформированной поверхностью коррекционной пластинки:

$$y = 10,9332, \quad x = 0,0369.$$

Далее могут быть вычислены величины сагиттального и меридионального радиусов кривизны несферической поверхности в рассматриваемой точке:

$$r_t = 270,08, \quad r_s = 809,98.$$

Зная величины меридионального и сагиттального фокусных расстояний для нашей линзы, косую толщину, координаты точки преломления главного луча на деформированной поверхности и ее радиусы кривизны, найдем меридиональный и сагиттальный отрезки после несферической поверхности:

$$t'_2 = 53,366, \quad s'_2 = 56,306.$$

Составив разность между отрезками, определим величину астигматизма вдоль главного луча

$$t'_2 - s'_2 = -2,940.$$

В рассматриваемом примере точного исправления астигматизма не дано; это объясняется тем, что величина исходного астигматизма была настолько велика, что принятые при выводе формулы (540) допущения оказались существенно нарушены.

Вместе с тем, получив исходное расположение коррекционной пластинки относительно выходного зрачка и изменяя его и коэффициент B , определяющий собой профиль поверхности, можно добиться полного исправления астигматизма на краю поля зрения и сферической aberrации на краю отверстия.

Для нашей линзы была выбрана плосковыпуклая форма; при изменении прогиба линзы астигматизм ее останется прежним, но кома существенным образом изменится. Все это позволит осуществить кроме исправления астигматизма и сферической aberrации еще и исправление комы для заданного угла поля зрения.

Ниже, в приложениях 1—4, даны схемы просчета лучей, расчета профиля и апланатической системы.

**Универсальная схема для просчета луча через
несферические поверхности второго порядка**

Уравнение кривой: $y^2 = Ax + Bx^2$; $A = 2r_0$.

Уравнение луча: $y = ax + b$; $a = -\operatorname{tg} u$, $b = s \operatorname{tg} u$.

$\lg s$	$\lg s$	$y : \operatorname{tg} u'$
$\frac{\operatorname{colg} r_0}{\lg (s : r_0)}$	$\frac{\lg \operatorname{tg} u}{\lg b}$	$\frac{+x}{s'}$
$\frac{\lg B}{\lg C}$	y	$\lg y$
C	$\frac{-b}{y-b}$	$\frac{\operatorname{colg} \sin \gamma}{\lg r_s}$
$\frac{+2}{2+C}$	$\lg (y-b)$	$\frac{\times 3}{3 \lg r_s}$
$\lg (2+C)$	$\frac{\operatorname{colg} \operatorname{tg} u}{\lg x}$	$\frac{2 \operatorname{colg} r_0}{\lg r_t}$
$\lg (s : r_0)$	$\frac{\lg B}{\lg Bx}$	$r_s =$
$\frac{2 \lg \operatorname{tg} u}{\lg m}$	Bx	$r_t =$
m	$\frac{+r_0}{Bx+r_0}$	
$\frac{+1}{m+1}$	$\operatorname{colg} (Bx+r_0)$	
$\lg (m+1)$	$\frac{\lg y}{\lg \operatorname{tg} \gamma}$	
$: 2$	u	
$\lg \sqrt{m+1}$	$\frac{-\gamma}{i}$	
$1C$	$\lg \sin i$	
$\frac{\pm \sqrt{m+1}}{p}$	$\frac{\lg (n : n')}{\lg \sin i'}$	
$\frac{\lg B}{\operatorname{colg} \operatorname{tg} u}$	i'	
$\lg (B : \operatorname{tg} u)$	$\frac{+\gamma}{u'}$	
$\frac{-\operatorname{tg} u}{l}$	$\lg y$	
$\lg p$	$\frac{\operatorname{colg} \operatorname{tg} u'}{\lg (y : \operatorname{tg} u')}$	
$\operatorname{colg} l$		
$\frac{\lg r_0}{\lg y}$		

Схема просчета луча через малодеформированную

поверхность вида $x = \frac{y^2}{2r_0} + By^4 + Cy^6 + \dots$

k_s	$2 \lg y_{0s}$	$\text{colg } 2r_{0s}$	$\lg B_s$	$\lg C_s$
$\frac{q'_s - 1}{q_s}$	$\frac{2 \lg y_{0s}}{4 \lg y_{0s}}$	$\frac{2 \lg y_{0s}}{\lg a_1}$	$\frac{4 \lg y_{0s}}{\lg b_1}$	$\frac{6 \lg y_{0s}}{\lg c_1} \dots$
$\lg q_s$	$\frac{2 \lg y_{0s}}{6 \lg y_{0s}}$	a_1	$\lg \Delta x_1$	
$\lg \sin u_s$	\dots	b_1	$\frac{\lg \text{tg } u_s}{\lg \Delta y_1}$	
$\frac{\text{colg } r_{0s}}{\lg \sin i_{0s}}$	\dots	c_1	Δy_1	
u_s	\dots	\dots	$\frac{y_{0s}}{y_{1s}}$	
$\frac{-i_{0s}}{\gamma_{0s}}$	\dots	x_{1s}	y_{1s}	
γ_{0s}	\dots	$-x_{0s}$		
Δx_1				

$\lg \sin \gamma_{0s}$				
$\frac{\lg r_{0s}}{\lg y_{0s}}$	$2 \lg y_{1s}$	$\text{colg } 2r_{0s}$	$\lg B_s$	$\lg C_s$
1	$\frac{2 \lg y_{1s}}{4 \lg y_{1s}}$	$\frac{2 \lg y_{1s}}{\lg a_2}$	$\frac{4 \lg y_{1s}}{\lg b_2}$	$\frac{6 \lg y_{1s}}{\lg c_2} \dots$
$\frac{\cos \gamma_{0s}}{1 - \cos \gamma_{0s}}$	$\frac{2 \lg y_{1s}}{6 \lg y_{1s}}$	a_2	$\lg \Delta x_2$	
$\lg(1 - \cos \gamma_{0s})$	\dots	b_2	$\frac{\lg \text{tg } u_s -}{\lg \Delta y_2}$	
$\frac{\lg r_{0s}}{\lg x_{0s}}$	\dots	c_2	Δy_2	
x_{0s}	\dots	x_{2s}	$\frac{y_{0s}}{y_{2s}}$	
		$-x_{0s}$		
		Δx_2		

$\lg \dots$ продолжать до равенства $\Delta x_{k+1} = \Delta x_{k+1}$

$\lg a$	$\lg b$	$\lg c$	
$\lg 2$	$\lg 4$	$\lg 6$	
$\frac{\text{colg } y}{\lg l}$	$\frac{\text{colg } y}{\lg m}$	$\frac{\text{colg } y}{\lg n}$	\dots
l	u_s	$\lg \sin i_s$	
m	$-\gamma_s$	$\frac{\lg(n_s : n_{s+1})}{\lg \sin i'_s}$	$\lg y$
n	i'_s		$\frac{\text{colg tg } u'_s}{\lg(s'_s - x)}$
---	i'_s		$s'_s - x$
---	γ_s		$\frac{x}{s'_s}$
$\text{tg } \gamma_s$	$u'_s = u_{s+1}$		$\frac{-d_s}{s_{s+1}}$

системы из двух отражательных поверхностей

$$x_I = A_I y_I^2 + B_I y_I^4 + C_I y_I^6 + D_I y_I^8 + E_I y_I^{10}$$

$$x_{II} = A_{II} y_{II}^2 + B_{II} y_{II}^4 + C_{II} y_{II}^6 + D_{II} y_{II}^8 + E_{II} y_{II}^{10}$$

IV	V	VI	Переход на 1-ю поверхность после первого круга	Переход на 2-ю поверхность после первого круга
$\lg d_1''$				
$\frac{c \lg d_2''}{\lg N_2''}$	$\lg D_{I, II}$	$\lg y_I$		
$\lg A_2''$	$\lg d_1'$	$\lg y_{II}$		
$\frac{\lg N_2'' A_2''}{\lg N_2'' e_2''}$	$\frac{\lg D_{I, II} d_1'}{\lg E_{I, II}}$	$\frac{\lg y_I^2}{c \lg 2r_1}$		
$N_2'' A_2''$	$\lg e_1'$	$\lg a_1$	s_0'	$\sin u_3$
$-A_1''$	$\lg E_{I, II} e_2'$	$\lg y_I^2$		$\frac{\sin u_2^*}{\sin u_3 + \sin u_2^*}$
$\frac{E_{I, II} e''' = A'''}{e'''}$	$-D_{I, II} d_1'$	$\frac{\lg y_I^2}{\lg y_I^4}$	$\frac{-x_{II}}{s_0' - x_{II}}$	$\cos u_3$
$\lg A'''$	$-E_{I, II} d_1'$	$\lg B_{I, II}$	$\lg (s_0' - x_{II})$	$\cos u_2^*$
$\frac{c \lg e'''}{\lg E_{I, II}}$	$\frac{-D_{I, II} d_1' - E_{I, II} e_1'}{A_1'}$	$\frac{\lg b_1}{\lg y_I^2}$	$\frac{\lg \operatorname{tg} u_3}{\lg y_{II}^*}$	$\frac{\cos u_3 + \cos u_2^*}{\lg (\sin u_3 + \sin u_2^*)}$
$\widehat{\lg} e_1''$	$C_{I, II} \cdot c_1$	$\lg y_I^4$	y_I	$c \lg (\cos u_3 + \cos u_2^*)$
$\lg E_{I, II} e_1''$	$\lg C_{I, II} c_1$	$\lg y_I^6$	$\frac{-y_{II}^*}{y_I - y_{II}^*}$	$\lg \operatorname{tg} \gamma_{II}$
A_1'	$c \lg c_1'$	$\lg C_{I, II}$	$-x_I$	$\frac{c \lg y_{II}^*}{\lg \operatorname{tg} \gamma : y_{II}^*}$
$\frac{-E_{I, II} e_1''}{A_1'' - E_{I, II} e_1'' =}$	$\frac{\lg C_{I, II}}{\lg E_{I, II}}$	$\lg c_1$	x_{II}	$\frac{\operatorname{tg} \gamma_{II} : y_{II}^*}{-1 : r_2}$
$= D_{I, II} d_1''$	$C_{I, II}$	$\lg y_I^2$	$\frac{x_{II}}{x_{II} - x_I}$	A_{II}
$\lg (A_1'' - E_{I, II} e_1'')$	$\lg E_{I, II}$	$\lg y_I^6$	$+d_I$	
$\frac{e \lg d_1''}{\lg D_{I, II}}$	$\lg y_I^8$	$\lg D_{I, II}$	$d_I - x_I + x_{II}$	
$\frac{D_{I, II}}{E_{I, II}}$	$\lg E_{I, II} y_I^8$	$\lg g_1$	$\lg (y_I - y_{II}^*)$	
	$\lg D_{I, II}$	$\lg y_I^2$	$c \lg (d_I - x_I + x_{II})$	
	$\lg y_I^6$	$\lg y_I^8$	$\lg \operatorname{tg} u_2$	
	$\lg D_{I, II} y_I^6$	$\lg y_I^{10}$	u_2	
	$\lg c$	$\lg E_{I, II}$	$\lg \cos u_2$	
	$\lg y_I^4$	$\lg e_1$		
	$\lg C_{I, II} y_I^4$	a_1		

После пересчета IV схемы следует переход на вторую поверхность и далее переходим к схеме № II, III IV, V и VI, находя коэффициенты B_{II}, C_{II}, D_{II} и E_{II}

$$\begin{aligned}
 & \lg y_{I, II}^* \\
 & \frac{\lg y_{I, II}^*}{\lg y_{I, II}^{*2}} \\
 & \frac{\lg y_{I, II}^{*2}}{\lg y_{I, II}^{*4}} \\
 & \frac{\lg y_{I, II}^{*2}}{\lg y_{I, II}^{*6}} \\
 & \frac{\lg y_{I, II}^{*2}}{\lg y_{I, II}^{*8}} \\
 & \frac{\lg y_{I, II}^{*2}}{\lg y_{I, II}^{*10}} \\
 & 2 \lg y_{I, II}^* \\
 & \frac{c \lg 2r_{1, 2}}{\lg a} \\
 & 4 \lg y_{I, II}^* \\
 & \frac{\lg B_{I, II}}{\lg b} \\
 & 6 \lg y_{I, II}^* \\
 & \frac{\lg C_{I, II}}{\lg c} \\
 & 8 \lg y_{I, II}^* \\
 & \frac{\lg D_{I, II}}{\lg d} \\
 & 10 \lg y_{I, II}^* \\
 & \frac{\lg E_{I, II}}{\lg e} \\
 & \frac{+a}{+b} \\
 & \frac{+c}{+d} \\
 & \frac{+e}{+f} \\
 & \frac{a+b+c+d}{x_{I, II}}
 \end{aligned}$$

IV	V	VI		
$\lg a$	$E_{I, II} y_I^8$	$\frac{+b_1}{a'}$	$\frac{\cos u_2}{+1}$	$i_1 = \gamma_I$
$\frac{\lg 2}{\lg a'}$	$D y_I^6$	$\frac{+c_1}{b'}$	$1 + \cos u_2$	$\lg \sin \gamma_I$
$\lg b$	$E_{I, II} y_I^8 + D y_I^6$	$\frac{+d_1}{c'}$	$\lg \sin u_2$	$\frac{\lg (n_1 : n_2)}{\lg \sin i'_1}$
$\frac{\lg 4}{\lg b'}$	$\frac{C y_I^4}{b}$	$\frac{+e'}{x_{I, II}}$	$c \lg (1 + \cos u_2)$	γ_I
$\lg C$	$\frac{-A_I}{-B_{I, II} y_I^2}$		$\lg \operatorname{tg} \gamma_I$	$\frac{-i'_1}{u'_1}$
$\frac{\lg 6}{\lg c'}$	$\lg B_{I, II} y_I^2$		$\frac{c \lg y_I}{\lg \operatorname{tg} (\gamma_I : y_I)}$	u'_1
$\lg g$	$\frac{c \lg y_I^2}{\lg B_{I, II}}$		$\operatorname{tg} (\gamma_I : y_I)$	u'_1
$\frac{\lg 8}{\lg d'}$	$B_{I, II}$		$\frac{-1 : r_1}{A_I \text{ и т. д.}}$	$\frac{-\gamma_{II}}{i_2}$
$\lg e$				$\lg \sin i_2$
$\frac{\lg 10}{\lg e'}$				$\frac{\lg (n_2 : n_3)}{\lg \sin i'_2}$
a'				i'_2
$\frac{+b'}{a' + b'}$				$\frac{\gamma_{II}}{u'_2}$
$\frac{+c'}{a' + b' + c'}$				$\lg y_{II}$
$\frac{+d'}{a' + b' + c' + d'}$				$\frac{c \lg \operatorname{tg} u'_2}{\lg (s'_2 - x_{II})}$
$\frac{+e'}{N}$				$s'_2 - x_{II}$
$\lg N$				$\frac{x_{II}}{s'_2}$
$\frac{c \lg y_{I, II}}{\lg \operatorname{tg} \gamma_{I, II}}$				$\frac{-s'_0}{\Delta s'}$
				$\lg y_I$
				$\frac{c \lg \sin u'_2}{\lg f'}$
				f'
				$\frac{-f'_0}{\Delta f'}$

Шестой столбец повторяется для каждого из значений y_I и y_{II}

На втором круге и далее все величины идут без *

Продолжение

d_1	$\frac{d_1 - x_I}{d_1 - x_I + x_{II}}$
$\frac{-x_I}{d - x_I}$	$\lg(d_1 - x_I + x_{II})$
$\lg(d - x_I)$	$\frac{\lg \operatorname{tg} u'_1}{\lg(y_I - y_{II})}$
$\frac{\lg \operatorname{tg} u'_I}{\lg(y_I - y_{II}^*)}$	y_I
y_I	$\frac{-(y_I - y_{II})}{y_{II}}$
$\frac{-(y_I - y_{II}^*)}{y_{II}^*}$	

x_{II} — можно брать из расчета уравнения с четырьмя неизвестными (здесь d_1 — из задания).

Схема расчета профиля несферической поверхности высшего порядка

$\beta'_k = \beta'_{k-1} + \Delta\beta'$	$a_k = a_{k-1} +$
$\frac{\lg \sin \beta'_k}{c \lg n}$	$+ \operatorname{tg} i'_{k-1} + \operatorname{tg} i'_k$
$\frac{\beta''_k}{\lg \sin \beta''_k}$	$(a_1 = 0)$
$\frac{\lg \operatorname{tg} \beta''}{2 \lg n}$	$\lg a_\kappa$
$\frac{\lg \operatorname{tg} \beta_\kappa}{\beta_\kappa}$	$\lg \frac{\Delta\beta'}{2}$
$\frac{\lg \sin \beta'_k}{\lg n}$	$\frac{\lg \lg e}{\lg \left(\frac{\Delta\beta'}{2} a_\kappa \lg e \right)}$
$\frac{\lg n \sin \beta'_k}{n \sin \beta'_k}$	$\frac{\Delta\beta'}{2} a_\kappa \lg e$
$\frac{-\sin \beta_\kappa}{\Delta_1}$	$\frac{\lg R_0}{\lg R_\kappa}$
$\frac{\lg \cos \beta'_k}{\lg n}$	$\lg \sin \beta'_k$
$\frac{\lg n \cos \beta'_k}{n \cos \beta'_k}$	$\frac{\lg y_\kappa}{y_\kappa}$
$\frac{-\cos \beta_\kappa}{\Delta_2}$	$\lg R_\kappa$
$\lg \Delta_1$	$\frac{\lg \cos \beta'_k}{\lg R_\kappa \cos \beta'_k}$
$\frac{c \lg \Delta_2}{\lg \operatorname{tg} \gamma_\kappa}$	R_0
β'_k	$R_\kappa \cos \beta'_k$
$\frac{-\gamma_\kappa}{i'_k}$	x_κ
$\lg \operatorname{tg} i'_k$	
$\operatorname{tg} i'_k$	

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов Д. С. Дифференциальный метод введения несферических поверхностей в расчеты оптических систем. «Известия АН СССР» (Отделение технических наук), № 9, 1945.
2. Волосов Д. С. Методы расчета сложных фотографических систем. М.—Л., ОГИЗ Гостехиздат, 1948.
3. Зверев В. А. Расчет хода луча через несферическую преломляющую поверхность высшего порядка. Известия вузов «Приборостроение», т. IV, № 2, 1961.
4. Зверев В. А. Расчет хода косоугольного (внемеридионального) луча через поверхность параболоида вращения. Известия вузов «Приборостроение», т. IV, № 3, 1961.
5. Мартин Л. Техническая оптика. М., Физматгиз, 1960.
6. Моторин Г. Н. Теория аберраций III порядка в приложении к несферическим поверхностям. Л., ЛИТМО, 1939.
7. Русинов М. М. О тригонометрическом просчете хода лучей через несферическую поверхность высшего порядка. Л., Сб. ЛИТМО № 27, 1958.
8. Русинов М. М. Об исправлении дисторсии с помощью деформирования первой поверхности выравнивающего стекла в аэрофотоаппаратах. «Геодезия и картография», 1958, № 3.
9. Русинов М. М. О влиянии выравнивающего стекла на изменение астигматизма аэрофотообъективов. «Геодезия и картография», 1959, № 2.
10. Русинов М. М. О некоторых свойствах линз с несферическими поверхностями второго порядка. Известия вузов «Приборостроение», т. III, № 1, 1960.
11. Русинов М. М. О дисторсии плоскопараболической линзы. Известия вузов «Приборостроение», т. III, № 2, 1960.
12. Русинов М. М. О коме плоскопараболической линзы. Известия вузов «Приборостроение», т. III, № 2, 1960.
13. Русинов М. М. О работе пластинки с несферической поверхностью, размещенной между выходным зрачком и изображением. «Геодезия и картография», 1960, № 1.
14. Русинов М. М. Определение профиля несферической поверхности по заданному строению преломленного пучка лучей. Известия вузов «Приборостроение», т. V, № 2, 1962.
15. Русинов М. М. Техническая оптика. Л., Машгиз, 1961.
16. Слюсарев Г. Г. Методы расчета оптических систем. М.—Л., ОНТИ, 1937.
17. Слюсарев Г. Г. Геометрическая оптика. М.—Л., Изд. АН СССР, 1946.
18. Тудоровский А. И. Теория оптических приборов. Т. II. М.—Л., Изд. АН СССР, 1957.
19. Турыгин И. А. Применение в оптических системах асферических поверхностей, мало отличающихся от сферы. Расчеты оптических систем. МВТУ, вып. 102. М., Оборонгиз, 1961.

20. Чуриловский В. Н. Введение поверхностей высших порядков в расчеты оптических систем. Л., ЛИТМО, 1941.
21. Чуриловский В. Н. О новом типе астрономического зеркального объектива, основанного на системе Мерсенна. «Оптическое приборостроение», вып. 27, 1958.
22. Chrétien H. Rev. d'Optique 1, 13, 1922.
23. Martin L. Proc. Phys. Soc., vol. 56, N 104, 1944.
24. Schwarzschild K. Untersuchungen zur geom. Optik Berlin N 1, 1905.
25. Schwarzschild K. Gött. Abh. N. F. 4, N 1—3, 1905.
26. Schmidt. Mitt. Hamburg. Sternwarte, 7, N 36, 1932.
27. Dannberg W., Würtz G. Berechnung einer deformierten, Planparallelen Glasplatte in der Bildebene eines Objektivs zur Kompensation der Verzerrung, Jena, Kompendium Photogrammetrie Bd. VI.
-

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Введение	3
Глава I. Некоторые общие свойства несферических поверхностей	5
§ 1. Задание уравнения профиля несферической поверхности	5
§ 2. Радиусы кривизны несферической поверхности	9
Глава II. Несферические поверхности второго порядка	15
§ 3. Радиусы кривизны кривых второго порядка. Анаберрационные поверхности	15
§ 4. Анастигматические несферические поверхности	19
§ 5. Дисторсия плоскопараболической линзы	27
§ 6. Кома плоскопараболической линзы	29
§ 7. Полевая сферическая аберрация плоскопараболической линзы	31
Глава III. Просчет лучей через несферические поверхности	34
§ 8. Просчет лучей через несферические поверхности второго порядка (эллипс, гиперболу, параболу)	34
§ 9. Просчет лучей через поверхности высшего порядка	37
§ 10. Просчет луча через поверхности высшего порядка, заданные в полярной системе координат	49
Глава IV. Теория аберраций третьего порядка в приложении к несферическим поверхностям	53
§ 11. Деформация сферической поверхности	53
§ 12. Формулы коэффициентов аберраций третьего порядка для несферических поверхностей	55
§ 13. Аберрации третьего порядка для тонкого компонента с несферическими поверхностями	67
Глава V. Некоторые приемы расчета профилей несферических поверхностей	69
§ 14. Коррекционная пластинка Шмидта	69
§ 15. Коррекционная пластинка с несферической поверхностью вблизи изображения	73
§ 16. Коррекционная пластинка с деформированной поверхностью, расположенная между выходным зрачком и изображением	80
§ 17. Определение профиля несферической поверхности, расположенной внутри системы	86
Глава VI. Малое деформирование сферических поверхностей с целью уничтожения аберраций высших порядков	92
§ 18. Постановка задачи	92
§ 19. Деформированная плоскость (планоидная поверхность)	94
§ 20. Деформированная сфера	97

	Стр.
Глава VII. Исправление двух аберраций с помощью одной несферической поверхности	104
§ 21. Постановка задачи. Роль расположения поверхности	104
§ 22. Одновременное исправление сферической аберрации и отступлений от условий синусов Аббе	106
§ 23. Совместное исправление астигматизма и сферической аберрации	111
§ 24. Совместное исправление астигматизма и дисторсии	121
Глава VIII. Интегральные методы вычисления профилей несферических поверхностей	126
§ 25. Общий интеграл несферической поверхности	126
§ 26. Общий интеграл несферической поверхности при наличии сферической аберрации	132
§ 27. Численное определение интегралов несферической поверхности	138
§ 28. Просчет лучей в случае задания профиля несферической поверхности в табличной форме	141
§ 29. Дифференциальное уравнение для астигматизма несферической поверхности	147
Глава IX. Оптические системы с двумя несферическими поверхностями	150
§ 30. Расчет апланатической системы из двух несферических поверхностей	150
§ 31. Расчет апланатической системы из двух несферических поверхностей, разделенных промежуточной системой	153
§ 32. Расчет оптической системы, составленной из двух несферических поверхностей с одновременным исправлением астигматизма и сферической аберрации	156
Глава X. Конструкции некоторых оптических систем с применением несферических поверхностей	162
§ 33. Система Шмидта	162
§ 34. Расчет объектива с малым деформированием сферической поверхности	166
§ 35. Ортоскопическая линза для широкоугольного фотографического объектива	169
§ 36. Использование плоскоэллиптической линзы в гидросъемочных ортоскопических объективах	172
§ 37. Система из двух несферических зеркал	175
§ 38. Исправление астигматизма и сферической аберрации с помощью одной несферической поверхности для простой линзы в воздухе	181
Приложения	184
Литература	192

Русинов Михаил Михайлович

**НЕСФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ
В ОПТИКЕ**

Редактор *Н. П. Заказнов*
Редактор издательства *А. А. Чернов*
Техн. редактор *В. И. Алексеева*
Корректор *В. П. Крымова*

Подписано к набору 30/IX 1964 г.
Подписано к печати 12/1 1965 г.
Формат 60×90¹/₁₆. Печ. л. 12,25.
Уч.-изд. л. 12,0. Т-00707. Тираж 2000 экз.
Зак. № 2289/2096-15. Цена 70 коп.
Объявлено в сводном тем. плане изд-ва «Недра»
1965 г. № 495. Индекс 1—1—1

Издательство «Недра».
Москва, К-12, Третьяковский пр., 1/19.
Ленинградская типография № 14
«Красный Печатник»
Главполиграфпрома Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати.
Московский проспект, 91.

ИСПРАВЛЕНО
Замеченные опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
41	9 снизу	$r_t = \frac{r_s^3}{y^3 y''}$	$r_t = -\frac{r_s^3}{y^3 y''}$
41	3 снизу	$r_t = \frac{r_s^3}{y^2 \left(-\frac{r_s^2}{y^2} + 1 + B + 3Cx + \dots \right)}$	$r_t = -\frac{r_s^3}{y^2 \left(-\frac{r_s^2}{y^2} + 1 + B + 3Cx + \dots \right)}$
43	5 снизу	\bar{A}_t	A_t
46	Таблица 2 столбец 8 сверху	$\overline{k_s} \quad \overline{k_{s+1}}$	$\overline{\bar{k}_s} \quad \overline{\bar{k}_{s+1}}$
66	1 снизу	$= h_k P_k$	$= h_k P_k^*$
77	5 снизу	$\frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos i}{t} =$ $= \frac{n' \cos i' - n \cos^2 i}{r_t},$	$-\frac{n \cos^2 i}{t} =$ $= \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_t},$
111	6 снизу	$= \frac{y^2}{-4x}$	$\frac{y^2}{4x}$
112	7 сверху	$= \frac{n_2 \cos i'_2 - n_2 \cos i_2}{r_s} \cong$	$= \frac{n_2 \cos i'_2 - n_2 \cos i_2}{r_s} =$
118	4 снизу	$+ \varphi^3$	$+ \varphi^2$
119	1 снизу	$= \cos(u' - \varphi)$	$= \cos(u' - \psi)$
122	3 сверху	$t_1 \cos^2 \beta$	$t_1 \cos \beta$
127	9 сверху	R_0	Δt
127	11 сверху	Δt	$-R_0$
148	7 сверху	$= \cos^2 i$	$= \cos^2 i'$
167	17 снизу	$= -2,42 \cdot 0,1 = -0,242;$	$= 2,42 \cdot 0,1 = 0,242;$